



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán**  
**Secretaría General**  
**Departamento de Matemáticas**

**Memorias del**  
**Congreso Internacional**  
**Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas**



**ISSN 2448-7945**

**Año 6 – Número 3 – Mayo 2022**

**COMITÉ EDITORIAL**

**Dr. Jorge Altamira Ibarra**  
**Dr. José Luz Hernández Castillo**  
**L. S. C. Liana López Pacheco**

A través de los programas de apoyo a proyectos  
PAPIME PE108322

**5 y 6 de mayo 2022**





MEMORIAS DEL

# Congreso Internacional

Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

Congreso Internacional

Memorias del Congreso Internacional Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas, Año 6, No. 3, agosto 2021 – agosto 2022, es una publicación anual editada por la Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, Ciudad de México, C.P. 04510, a través de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Carretera Cuautitlán – Teoloyucán km. 2.5, Col. San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcalli, Estado de México, C.P. 54714, Tel. (55)56231890 y (55)56231886,

<http://congresomatematicas.cuautitlan2.unam.mx>, [altamira@unam.mx](mailto:altamira@unam.mx)

Editor responsable Dr. Jorge Altamira Ibarra. Reserva de Derecho al uso Exclusivo No. 04-2016-080508273200-203. Otorgado por el Instituto Nacional del derecho de Autor, ISSN 2448-7945, ambos otorgados por el Instituto Nacional de derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Carretera Cuautitlán – Teoloyucán km. 2.5, Col. San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcalli Estado de México, C.P. 54715, fecha de la última modificación, mayo 2022. Se autoriza la reproducción total o parcial de los textos aquí publicados siempre y cuando se cite la fuente completa y la dirección electrónica de la publicación.



## AGRADECIMIENTOS

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, por brindar la oportunidad de desarrollar el pensamiento crítico, analítico, creativo e innovador.

A LA FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN, por todas las facilidades prestadas al buen desempeño del “Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas”.

# Congreso Internacional

Al Dr. David Quintanar Guerrero Director de la FES-Cuautitlán, I. A. Alfredo Álvarez Cárdenas Secretario General de la FES-Cuautitlán y a la Lic. Claudia Vanessa Joachin Bolaños Coordinadora de Comunicación y Extensión Universitaria, por brindarnos su apoyo para la realización de este Congreso.

AL COMITÉ ORGANIZADOR, por sus valiosas sugerencias y por su esfuerzo conjunto para el éxito del evento.

A todos aquellos profesionales que enviaron y presentaron sus trabajos académicos y científicos y al grupo de alumnos y profesores que participaron en la realización de este congreso.

COMITÉ ORGANIZADOR

## Comité arbitral

### Comité evaluador científico nacional:

- Dr. Aguilar Márquez Armando
- Dr. Altamira Ibarra Jorge
- Dra. Canabal Cáceres Silvia Guadalupe
- FM. Castillo Padilla Juana
- Dr. Contreras Espinosa José Juan
- MC. Flores Pérez Mayte
- Dr. García León Omar
- M en I. García Ruiz Juan José
- Dr. Hernández Castillo José Luz
- Dr. Hernández Gómez Víctor Hugo
- M en SI. Lara Martínez Maricela
- Dra. León Rodríguez Frida María
- LSC. López Pacheco Liana
- Dr. López Salazar Leonel Gualberto
- M en CE. Márquez Ortega Domingo
- Dr. Mata Vargas Iván Noé
- Dra. Mora Reyes Laura
- Dr. Oropeza Legorreta Carlos
- Dr. Osorio Galicia Ramón
- M en I. Pineda Becerril Miguel de Nazareth
- Dr. Ramos Carranza Rogelio
- Ing. Rico Castro José Juan
- Dra. Rigaud Téllez Nelly
- Dr. Roldan Vázquez Valentín
- MGTI. Rosas Fonseca Rosalba Nancy
- Dr. Sánchez Barrera Julio Moisés
- M en C. Sánchez Guerra José Isaac
- Dr. Sánchez Nava Hugo
- Dra. Urrutia Vargas Celina Elena
- MAO. Urrutia Vargas Martha Lilia
- M en C. Vázquez Salazar María Guadalupe
- M en I. Vázquez Suarez Vicente

### Comité evaluador científico internacional:

- Dra. Crespo Crespo Cecilia (Argentina)
- Dr. Francisco Curcio Italo (Brasil)
- Dr. Gaitán Lozano Ricardo (Colombia)
- Dra. Mota Villegas Dorenis Josefina (Venezuela)
- Mtro. Valle Pereira Ricardo Enrique (Venezuela)

# Índice

1. Las tic en la resolución de problemas de programación lineal
2. Evaluación estudiantil de la e-evaluación de un curso de cálculo multivariado con kahoot! y mathematica
3. Diseño del sistema fotovoltaico para suministrar de energía eléctrica una torre de telecomunicaciones en Oaxaca
4. Método del punto fijo o aproximaciones sucesivas para una raíz simple
5. Diseño y extracción de muestras utilizando diferentes técnicas de muestreo con SPSS
6. Cálculo de términos para aproximar el polinomio de Taylor
7. Algebra lineal con aprendizaje invertido
8. Cálculo y selección de aerogenerador en edificio farmacéutico en la Cd. Mx.
9. GeoGebra como herramienta de apoyo en la aplicación de Investigación de Operaciones
10. Análisis mediante minería de datos del crimen de feminicidios en la Ciudad de México
11. Algoritmos evolutivos: una aplicación en modelos de optimización en economía
12. Aplicación de habilidades de análisis numérico soportado por un sistema experto: Las Jarras de Poisson
13. Tareas de aprendizaje de modelación matemática para la ED de la ley de Newton
14. Medición de esfuerzos residuales en componentes soldados
15. Propuesta de tarea de aprendizaje para el tema de desigualdades del curso de cálculo
16. Recursos educativos abiertos para un curso universitario de cálculo integral y ecuaciones diferenciales
17. Validación de la escala de resiliencia en alumnos universitarios
18. Series de Fourier como combinaciones lineales de una base de dimensión infinita ortogonal
19. Una investigación sobre enfoques de aprendizaje profundo
20. Mercados laborales locales y movilidad humana
21. Desarrollo de un libro electrónico con material interactivo del tema de estimación
22. Algoritmos de Machine learning implementados en ciberseguridad, para el análisis de fraudes bancarios

23. La enseñanza de la función cuadrática vista a través del conocimiento de los profesores
24. Control de calidad para determinar cloro en el laboratorio de química ambiental en FESC
25. Investigación exploratoria sobre la capacidad de resiliencia en estudiantes de licenciatura en administración
26. Uso de las tic's como apoyo en la enseñanza del tema de distribuciones de probabilidad
27. Uso de software libre para estudiar las transformaciones lineales de rotación y traslación en animaciones
28. Los conjuntos y la estadística, una aplicación en el aula
29. Diseño de brazo robótico unido a robot móvil aplicando el principio del péndulo invertido
30. Diagonalización de las matrices de masas de neutrinos
31. Diseño y construcción de maquina reveladora de películas periapicales
32. Pruebas y argumentaciones de estudiantes de bachillerato al resolver problemas de cuadratura de polígonos
33. Robótica educativa: opción asequible para que docentes de secundaria desarrollen pensamiento computacional en sus alumnos
34. Estrategias y técnicas en los cursos de matemáticas de bachilleres en modalidad virtual
35. Proyectos de estadística para reflexionar sobre la resiliencia en tiempo de pandemia
36. Ley de Gauss para campos eléctricos: experimento en pandemia
37. Reactancia eléctrica: Aplicación de los números imaginarios
38. El análisis matemático aplicándolo en los negocios
39. Inclusión de diversas formas de notación en electromagnetismo y métodos matemáticos
40. Gauss y la media aritmético-geométrica para el cálculo de número  $\pi$
41. Longitud de arco y el cálculo de Pi, una propuesta de actividad usando TIC
42. Enseñanza en línea: una reflexión didáctica pedagógica
43. Enseñanza y evaluación del curso de cinética química impartido en línea utilizando la hoja de cálculo Excel
44. La educación en línea: niveles de aprendizaje y el pensamiento matemático en las ciencias sociales
45. Enseñanza en línea y el aprendizaje de la estadística y probabilidad
46. El video como herramienta para visualizar, analizar y comprender las matemáticas

## LAS TIC EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

López Salazar Leonel Gualberto<sup>1\*</sup>, Contreras Espinosa José Juan<sup>2</sup>, Rico Castro José Juan<sup>3</sup>, Lara Martínez Maricela<sup>4</sup> y Roldán Vázquez Valentín<sup>5</sup>  
<sup>1, 2, 3, 4 y 5</sup> *Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Carretera Cuautitlán Teoloyucan s/n km. 2.5 Col. San Sebastián Xhala Cuautitlán Edo. De México cp. 54714.*

ID-POSM001

### Resumen

*El objetivo de este trabajo es mostrar una experiencia didáctica mediada con las TIC, implementada en un curso de investigación de operaciones. La herramienta que se utilizó es solver un complemento de una hoja de cálculo, con el solver podemos encontrar objetivos optimizados para modelos de programación lineales y no lineales. Además, con esta herramienta se puede obtener información adicional para la toma de decisiones relacionada de un conjunto de problemas de distribución de recursos. La inclusión de estas aplicaciones y servicios supone que el alumno comprenderá y analizará de manera significativa los modelos matemáticos relacionados con los problemas de gestión y asignación de recursos en las organizaciones.*

*La metodología o secuencia didáctica planeada se realizó de la manera siguiente: primero se explicaron los conceptos básicos relacionados con problemas de distribución de recursos para que el alumno se vinculara con el tema, posteriormente se procedió al planteamiento de problemas de PL y su resolución aplicando un método de cinco pasos. Entender el problema, definir las variables de decisión, plantear el modelo de programación en ecuaciones, resolver el problema aplicando el método simplex en solver y crear el informe de resultados.*

*El aprendizaje mediado con tecnologías puede propiciar una mejora en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos en matemáticas y todas las demás áreas del conocimiento, siempre y cuando estén bien contextualizadas y planeadas, el solo hecho de gestionar estrategias didácticas implementando TICS no garantiza el éxito en el aprendizaje ya que existen muchas variables en el aprendizaje que no podemos controlar.*

**Palabras clave:** programación, lineal, solver, TICS, didáctica.

### 1. Introducción

Tedesco (2005, p.10) comenta que “la tecnología tiene mucho potencial, pero no es sinónimo de aprendizaje”, por lo cual es indispensable utilizar modelos sociales, pedagógicos y estrategias didácticas apropiadas para potencializar el desempeño del alumno. El aprendizaje requiere la inclusión de algunos otros elementos como la psicología, la sociología, la pedagogía, la didáctica, la interacción social, el trabajo colaborativo, entre otras cosas más, que se complementan entre sí. La necesidad de

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: leonelguls@gmail.com Tel.55-73-62-75-46

45 aprender está estrechamente relacionada con el tipo de sociedad a la que  
46 pertenecemos y el tipo de sociedad en la que nos desenvolvemos es mayoritariamente  
47 digital.

48 Para plantear un proceso de enseñanza aprendizaje contextualizado es necesario  
49 conocer teorías, ideas, conceptos en materia de educación, de pedagogía, de  
50 didáctica, de epistemología, de psicología y de sociología, entre otros más, para  
51 entender el flujo que va tomando el proceso educativo en cada tiempo y lugar. En la  
52 actualidad el paradigma predominante o que más se ajusta a nuestros tiempos es el  
53 constructivismo (Benito, 2009). Este enfoque parece enmarcar los aspectos  
54 relacionados al aprendizaje que convergen en la construcción activa del conocimiento,  
55 ya sea de manera individual o en sociedad.

56 El principio de aprender a aprender mencionado en los cuatro pilares de la educación  
57 (Delors, 1996) nos permite sentar posiblemente un rumbo que seguir ya que en la  
58 construcción del conocimiento el aprender a hacer se ha tomado como uno de los  
59 elementos básicos de la construcción del conocimiento y ha permitido avanzar hacia  
60 nuevos planteamientos como el aprendizaje significativo de Ausbel.

61 Pozo (1989) dice que, según Ausubel, un aprendizaje es significativo cuando puede  
62 ser relacionado de modo no arbitrario y sustancial con la estructura de conocimientos  
63 que el alumno posee, es decir, se presenta un esfuerzo intencional para que el material  
64 o situación adquiera significado a partir de las relaciones que se pudieran estructurar  
65 con los conocimientos que tenga la persona. La intencionalidad de establecer  
66 relaciones puede ser mediante experiencias, hechos u objetos.

67 Entonces lo que se piensa es; primero establecer un marco de referencia relacionado  
68 con los conceptos básicos de la programación lineal, de tal manera que, el alumno los  
69 relacione con su aparato de conocimientos para posteriormente utilizar el software  
70 como apoyo para que el alumno pueda relacionar su funcionamiento con los conceptos  
71 asimilados para posteriormente plantear sus propios problemas de PL.

## 72 **2. Metodología o desarrollo**

73  
74 La metodología de desarrollo está basada en cinco pasos, en donde el alumno va  
75 comprendiendo en cada paso, los conceptos relacionados con la asignación de  
76 recursos en problemas lineales, esto se alinea con un proceso de toma de decisiones.

77  
78 Como primer paso tenemos el comprender el problema, los problemas regularmente  
79 se expresan en forma de prosa en donde se incluye la información suficiente para  
80 poder determinar las variables de decisión y el modelo de programación apropiado.  
81 Para determinar las variables y el modelo, es de suma importancia comprender el  
82 problema, es decir, no basta con leerlo es necesario analizarlo y/o estudiarlo lo  
83 suficiente para comprender que es lo que se necesita hacer, con qué recursos  
84 contamos y cuáles son las restricciones a las que estamos sujetos en la solución del



85 problema. Se debe de tomar en cuenta que los problemas son de maximizar o  
86 minimizar según el contexto del problema.  
87 Como segundo paso; tenemos la definición de variables de decisión, en donde se  
88 define al ámbito del modelo propuesto, las variables le dan sentido a un modelo de PL,  
89 sin ellas el planteamiento sería meramente teórico, en la definición de variables  
90 hacemos mención del o los recursos que estamos modelando y se expresan en su  
91 definición las unidades de medida.  
92

$S$  = número de sillas para jardín que se deben producir por semana.  
 $M$  = número de mesas para jardín que se deben producir por semana.  
 $P$  = número de puertas que se deben producir por semana.  
 $R$  = número de remates que se deben producir por semana.

93  
94 **Figura 1. Definición de variables de un PL**  
95

96 El tercer paso para resolver un problema de asignación de recursos es modelarlo  
97 mediante un sistema de ecuaciones con  $n$  variables. Se utilizan las variables definidas  
98 en el paso anterior para determinar una función objetivo que maximice o minimice el  
99 problema, para después determinar el modelo de ecuaciones que representan el  
100 problema. El sistema propuesto siempre conlleva condiciones de no negatividad para  
101 las variables. Se cuenta con una serie de restricciones que pueden ser tan diversas  
102 como: de espacio, tiempo, costo, materiales, etc.  
103

### Formular la solución simplex inicial

Para formular este problema, se usarán las siguientes variables de decisión:

$x_1$  = número de unidades de tipo Científica  
 $x_2$  = número de unidades de tipo Financiera

Max  $50x_1 + 40x_2$   
sujeto a:

$3x_1 + 5x_2 \leq 150$  Tiempo de ensamble  
 $1x_2 \leq 20$  Carcasas disponibles  
 $8x_1 + 5x_2 \leq 300$  Espacio en la planta  
 $x_1, x_2 \geq 0$

104  
105 **Figura 2. Modelo de un problema de programación lineal.**

106 El cuarto paso es resolver el problema mediante solver, el cual, es una librería o  
107 herramienta que nos proporciona Excel para resolver modelos de PL mediante el  
108 método simplex, donde además de resolver el problema determinando los valores  
109 máximos o mínimos de las variables que satisfacen el sistema o modelo de ecuaciones  
110 propuesto, nos proporciona un reporte para la toma de decisiones. Para apoyar el  
111 resultado propuesto por solver podemos apoyarnos de otras utilerías como la de  
112 zweigmedia para graficar un sistema propuesto en dos variables.

113  
114 Utilizando <https://www.zweigmedia.com/utilities/lpg/index.html?lang=es>: tenemos la  
115 solución por el método gráfico directa.  
116

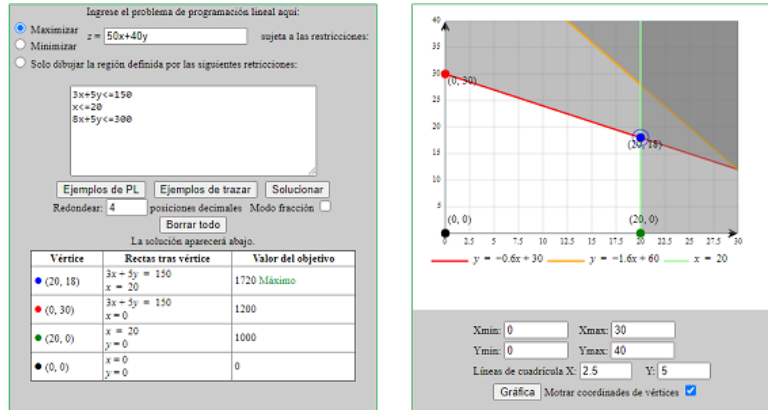


Figura 3. Solución directa por el método gráfico

117  
118

119 También podríamos requerir de manera explícita las iteraciones o los pasos del  
 120 método simplex, esto podría ser mediante la aplicación de mathstools.

121 [http://www.mathstools.com/section/main/simplex\\_online#](http://www.mathstools.com/section/main/simplex_online#):

122

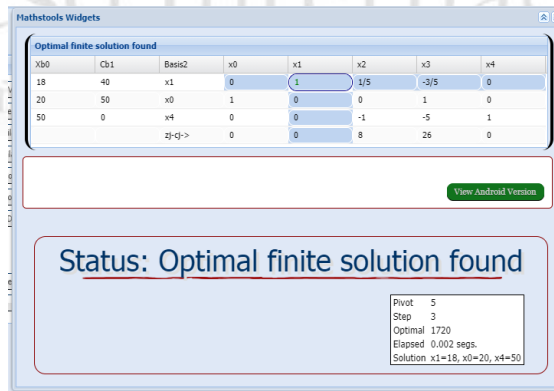


Figura 4. Iteración final y resultado del sistema

123  
124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

Como quinto paso obtenemos el resultado mediante solver en Excel para determinar los reportes de decisión figura 6. Lo único que se debe de tomar en cuenta para poder utilizar esta herramienta es presentar los datos en la hoja de cálculo, en donde se identifiquen los parámetros como son: la función objetivo en términos de las variables, el tipo de problema (maximizar o minimizar), las variables que podemos mover, las restricciones del modelo planteado y el método utilizado.

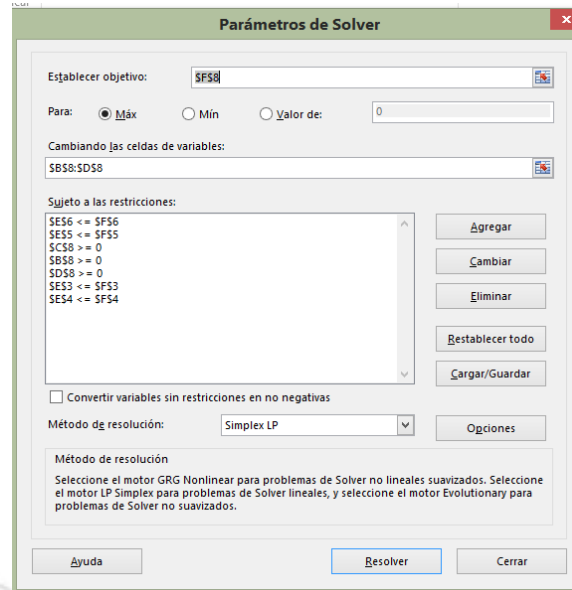


Figura 5. Reportes generados por solver

136  
137  
138  
139  
140

Etapa	Tiempo de producción			Capacidad (hrs/semana)
	Basic	Standard	Premium	
Cortado	1.43	1	1.25	42.1875
Costura	2	1.2	1	33.75
Acabado	1	1.5	1	33.75
Empacado	10	4	4	135
Utilidad por unidad	\$10.00	\$9.00	\$12.85	
Variables de decisión	0	0	33.75	\$433.69

Cambiantes						
Variable	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coficiente objetivo	Aumento permisible	Aumento permisible
3	Variables de decisión Basic	0	-22.125	10	22.125	1E+30
3	Variables de decisión Standard	0	-3.85	9	3.85	1E+30
8	Variables de decisión Premium	33.75	0	12.85	1E+30	3.85

Restricciones						
Variable	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Aumento permisible
3	Cortado	42.1875	0	630	1E+30	587.8125
1	Costura	33.75	0	630	1E+30	596.25
5	Acabado	33.75	0	708	1E+30	674.25
5	Empacado	135	3.2125	135	1881	135

- 1.- Para correr el Solver los valores de las variables de decisión deben de ser igual a 0 B8, C8 y D8 deben de tener el valor = 0
- 2.- En el menú datos activar en la ficha análisis en solver y como ya están cargadas todas las restricciones y datos solo se oprime resolver y listo.
- 3.- Podemos guardar los informe de Respuesta, Sensibilidad y Límites

Figura 6. Reportes generados por solver

141  
142  
143  
144  
145  
146  
147

### 3. Resultados y análisis

A partir del problema se definen las variables de decisión en el contexto del problema, para este modelo fueron  $X_1$  y  $X_2$  pero pueden ser otras S, P, R, etc. Tomando los datos del problema se plantea la función objetivo que en este caso es maximizar. Después se plantean las restricciones en forma de ecuaciones tomando las variables que se han definido al inicio del problema figura 2.

Una vez que se cuenta con el modelo del problema se decidió primero resolverlo mediante el método gráfico, mostrado en la figura 3 con apoyo de zweigmedia, esta herramienta nos proporciona la región factible y luego entonces la solución óptima mediante el método de punto esquina.

157 En la figura 4 podemos encontrar cada una de las iteraciones resultado de la aplicación  
158 del método simplex, esto permite al alumno verificar los resultados obtenidos en el  
159 método gráfico y de esta forma ellos pueden comprender como el método simplex  
160 recorre las diferentes soluciones factibles que se encuentran en la región factible para  
161 así encontrar la solución óptima del problema.  
162 Posteriormente mediante el solver obtenemos un análisis de sensibilidad, en donde  
163 podemos visualizar cómo se comportan los resultados al variar los valores de las  
164 variables y algunas restricciones.

165

#### 166 **4. Conclusiones**

167

168 Las TICS nos permiten diseñar formas diferentes para explicar los conceptos  
169 relacionados con las matemáticas. El proceso de enseñanza aprendizaje del alumno  
170 se enriquece con estas herramientas que prometen innovar los procesos de  
171 enseñanza aprendizaje y volverlos contextualizados y situados. No debemos dejar  
172 toda la responsabilidad de la innovación, motivación y contextualización a las TIC ya  
173 que hay que recordar que son tan útiles como puedan ser incorporadas en las  
174 estrategias didácticas de manera responsable y planificada. Las TICS por si solas no  
175 representan mejora en la educación, pero si nos proporcionan formas diferentes para  
176 nuestra práctica docente.

177 Resolver el problema manual o analíticamente, representa formas tradicionales de  
178 aprendizaje, pero no podemos decir que son malas solamente pudiera ser que estas  
179 formas ya no son vigentes al contexto en el que vivimos. Al utilizar estas TICS podemos  
180 mostrar al alumno de manera visual cómo se comporta las ecuaciones de manera  
181 particular y cómo es que en conjunto acotan el sistema en un conjunto de soluciones  
182 factibles. A partir de este conjunto de soluciones es que podemos determinar la  
183 solución óptima. Y mejor aún los reportes que generan nos permiten tener información  
184 adecuada para una toma de decisiones basada en información formal.

185

186 No se cree que las herramientas sustituyen completamente los métodos de enseñanza  
187 tradicionales sino más bien son un complemento para hacer las clases más, didácticas,  
188 que representen importantes retos en donde el alumno pueda potenciar y desarrollar  
189 sus habilidades y conocimientos al máximo.

190

191

#### 192 **Agradecimientos**

193

194 Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE108322.

195

196

#### 197 **Índice de referencias**

198

- 199 • Benito, M. (2009). Desafíos pedagógicos de la escuela virtual. Las TIC y los  
200 nuevos paradigmas educativos. *Telos* [en línea] (78) p. 34. Disponible en:

- 201 <https://telos.fundaciontelefonica.com/telos/articulocuaderno.asp@idarticulo=2&rev=78.htm>
- 202
- 203 • Delors, J. (1996), *La educación encierra un tesoro*, Madrid, UNESCO.
- 204 • Pozo, J. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Ed. Morata, Madrid.
- 205 • Tedesco, J. C. (2005). Las TIC y la desigualdad educativa en América Latina, presentado en el Tercer Seminario “Las tecnologías de información y comunicación y los desafíos del aprendizaje en la sociedad del conocimiento”, realizado entre el 30 de marzo y el 1 de abril de 2005, en Santiago de Chile, Seminario CEDI/OCDE de habla hispana.
- 206
- 207
- 208
- 209

MEMORIAS DEL  
Congreso Internacional  
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

# EVALUACIÓN ESTUDIANTIL DE LA E-EVALUACIÓN DE UN CURSO DE CÁLCULO MULTIVARIADO CON KAHOOT! Y MATHEMATICA

<sup>1</sup>Jiménez Zamudio Jorge Javier y <sup>2</sup>López García Jeanett

Facultad de Estudios Superiores Acatlán. Alcanfores y San Juan Totoltepec. Santa Cruz Acatlán, Estado de México.

EA- POSM002

## Resumen

El objetivo de este estudio de caso es informar sobre el grado de aceptación de las evaluaciones continuas, formativas y sumativas, haciendo exámenes diseñados en dos vertientes: (i) una evaluación sincrónica, a través de la herramienta denominada Kahoot!; y (ii) una evaluación asíncrona, de respuesta abierta, con soporte en materiales elaborados en power point y depositados para consulta en la plataforma Moodle, y uso de Mathematica. La investigación se realizó con estudiantes de un curso de Cálculo en varias variables, en educación superior en una universidad pública en México, durante el periodo de la pandemia del COVID-19; por lo tanto, las actividades de enseñanza y de evaluación se realizaron en línea (e-evaluación). Los lineamientos para la elaboración de los contenidos de los instrumentos de evaluación se basaron en el modelo Aligning Learning Outcomes and Assessment (ALOA) desarrollado por Falcão (2013). La asignación de calificaciones en las preguntas abiertas se realizó a través de rúbricas. Para conocer el nivel de aceptación de la forma de evaluación a través de las 16 semanas de duración del curso, se adaptó el instrumento Driscoll Questionnaire (Curto, Orcos, Blázquez, y Molina, 2019) y se calculó la fiabilidad del cuestionario de satisfacción a través del alfa de Cronbach. Los resultados del estudio revelaron que los participantes se mostraron muy positivos sobre el uso del software empleado en las evaluaciones continuas. Se concluye que la combinación tanto de las evaluaciones asíncronas con Mathematica, como las sincrónicas con Kahoot! son herramientas que se complementan adecuadamente en el proceso de evaluación continua formativa y sumativa que producen resultados bien valorados por los estudiantes.

**Palabras clave:** e-evaluación Kahoot!, Mathematica, Adaptación, de Driscoll

## 1. Introducción

El súbito cambio de la educación mayoritariamente presencial a la modalidad de educación virtual debido a la pandemia de COVID-19 obligó, en México, a cancelar la asistencia de los estudiantes y profesores a las instituciones de educación, desde marzo de 2021.

De acuerdo con Statista Research Department. (2021, párr. 1) a raíz de la pandemia de COVID-19 la digitalización del sistema educativo se intensificó en todo el mundo; los resultados de una encuesta realizada entre estudiantes universitarios en 2020, mostró que el porcentaje de encuestados inscritos en programas presenciales que tenía algunas clases en línea antes de la pandemia era del 15% y ascendió al 85% de los alumnos entrevistados.

La UNESCO (s/f) señala que después de un año de la pandemia de COVID-19, contado a partir de marzo de 2020, cerca de la mitad de los estudiantes del mundo todavía eran afectados por el cierre parcial o total de las escuelas, y está apoyando a

<sup>1</sup> [jzamudio02@yahoo.com](mailto:jzamudio02@yahoo.com) Tel. 55 5451 7320

44 países en sus esfuerzos por mitigar el impacto de la pandemia para afrontar las  
45 pérdidas de aprendizaje y adaptar los sistemas educativos.

46 De acuerdo con Quesada (s/f, pp. 1-3) en la modalidad de enseñanza en línea, los  
47 elementos fundamentales que deben estar presentes en la evaluación del  
48 aprendizaje han sido poco analizados no obstante la relevancia en el proceso  
49 educativo. A pesar de la apabullante cantidad de documentos y fuentes que hablan  
50 de este tipo de educación no existen suficientes referencias que propongan con  
51 fundamento la manera de evaluar el aprendizaje alcanzado por sus usuarios. En la  
52 educación en línea, la interacción profesor-alumno se hace por medio de los recursos  
53 tecnológicos y disminuye significativamente la posibilidad de contar con el lenguaje  
54 gestual, corporal, oral y la comunicación en tiempo real que dé información del  
55 aprendizaje de los estudiantes, aunque en contraste, la modalidad convierte al docente  
56 en un evaluador permanente del aprendizaje de cada uno de sus estudiantes.

57 Uno de los aspectos que han cobrado importancia con el cambio de modalidad  
58 presencial al de en línea, corresponde a la deshonestidad que se pudiera presentar  
59 por el estudiantado al realizar sus evaluaciones. Al respecto Blanch-Mur, Rey-Abella,  
60 y Floch-Soler (2006, p. 58) señalan que, en un estudio realizado en Reino Unido, los  
61 alumnos no veían en principio punible o censurable copiar partes enteras de trabajos  
62 de otros autores; asimismo, identificaron como las conductas deshonestas más  
63 frecuentes entre estudiantes el copiar, plagiar trabajos y pedir ayuda a terceros para  
64 la realización de trabajos supuestamente individuales. Los autores mencionados,  
65 añaden que entre las razones para las prácticas deshonestas se encuentran: la  
66 generalización del acceso a medios electrónicos, especialmente internet, y la  
67 reutilización de documentos en distintos ámbitos.

68 Las manifestaciones de la ansiedad ante exámenes se presentan en dos formas,  
69 fisiológica y cognitiva, correspondiendo la primera a la emocionalidad y la segunda a  
70 la preocupación. La ansiedad ante los exámenes se define como un rasgo de  
71 personalidad específico para exhibir ansiedad de forma más intensa y frecuente de lo  
72 habitual, con preocupaciones que interfieren con la atención, concentración y  
73 realización de exámenes (Dominguez-Lara, 2016, p. 220).

74 De acuerdo con Gil-Jaurena y Kucina (2016, pp. 1-2) y Falcão (2013, p. 1) los  
75 resultados del aprendizaje son fundamentales para estructurar los estándares y  
76 directrices de evaluación de la calidad en las instituciones de educación superior y  
77 continua en Europa y en todo el mundo; esto implica cambiar el paradigma de un  
78 enfoque basado en el contenido a un enfoque centrado en el aprendizaje. Las prácticas  
79 de evaluación seleccionadas deben: (i) utilizar una gama diversa de métodos; (ii)  
80 identificar y describir los logros de acuerdo con los criterios y estándares relevantes;  
81 (iii) desarrollar la evaluación de actividades más integrales y complejas utilizando  
82 conocimientos y habilidades en la resolución de problemas o tareas auténticas; (iv)  
83 vincular los resultados previstos del aprendizaje y las tareas de evaluación.

84 No obstante, de que el rendimiento académico es un tema relevante en la investigación  
85 educativa, su operacionalización aún está sujeta a controversia, debido a que no hay

86 un consenso sobre considerar el promedio ponderado, o el rendimiento en los  
87 exámenes, como medida de rendimiento académico (Domínguez-Lara, 2017, p. 1).  
88 Coll, Rochera, Mayordomo y Naranjo (2007, pp. 786. 788) señalan que la evaluación  
89 continua permite al docente hacer un seguimiento preciso del proceso de aprendizaje  
90 de los estudiantes y de obtener múltiples evidencias de los resultados. Asimismo,  
91 agregan que: (i) las situaciones y actividades que se utilizan para identificar y valorar  
92 el aprendizaje de los alumnos constituyen el punto de unión entre los procesos de  
93 enseñanza que despliega el profesor y los procesos de construcción del conocimiento  
94 que realizan los alumnos, y (ii) las actividades de evaluación han de ser coherentes  
95 con el resto de los elementos que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje.  
96 De acuerdo con el diccionario JISC (s/f) se denomina e-evaluación (e-assessment) a  
97 “los procesos de evaluación electrónica de extremo a extremo donde se utilizan las  
98 TIC para la presentación de la actividad de evaluación y el registro de respuestas”.  
99 Además, en el *Teacher’s Handbook on e-Assessment* (Crisp, s/f, p.5) señala que la e-  
100 evaluación o evaluación electrónica implica el uso, de manera sincrónica o asincrónica,  
101 de dispositivos digitales para ayudar en la construcción, entrega, almacenamiento o  
102 informe de las tareas, respuestas, calificaciones o comentarios de la evaluación de los  
103 estudiantes. Asimismo, puede utilizar una multitud de formatos, incluidos documentos de  
104 texto o formatos de documentos portátiles, formatos multimedia como sonido, video o  
105 imágenes; puede involucrar simulaciones o juegos complejos.

106

## 107 **Hipótesis**

108

109 La e-evaluación diseñada con valoraciones continuas sincrónicas y asincrónicas, la  
110 gamificación y el soporte de Mathematica para operaciones rutinarias, es bien valorada  
111 por los estudiantes y mejoran su rendimiento académico.

112

## 113 **Objetivo**

114

115 El objetivo de este estudio de caso es informar sobre el grado de aceptación de las  
116 evaluaciones continuas, formativas y sumativas, haciendo exámenes diseñados en  
117 dos vertientes: (i) una evaluación sincrónica, a través de la herramienta denominada  
118 Kahoot!; y (ii) una evaluación asíncrona, de respuesta abierta, con soporte en  
119 materiales elaborados en power point y depositados para consulta en la plataforma  
120 Moodle, y uso de Mathematica.

121

## 122 **2. Desarrollo y metodología**

123

124 La población estuvo configurada por estudiantes universitarios que cursaban, en dos  
125 grupos diferentes, la asignatura de Cálculo en varias variables en el tercer semestre  
126 de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación de la Universidad Nacional  
127 Autónoma de México. Los contenidos de la asignatura, en principio fueron equivalentes  
128 debido a que las exposiciones por videoconferencia se realizaron con base a  
129 presentaciones en *powerpoint* diseñadas y compartidas por lo expositores.



130 Para reducir la propensión a conductas deshonestas, y disminuir el estrés vinculado a  
131 la parte emocional, derivado de la presión que ejerce el tiempo para la resolución de  
132 tareas o evaluaciones, se optó por dejar las actividades a realizar en forma asíncrona,  
133 con plazos mayores a las 48 horas corridas; para reducir la ansiedad vinculada a la  
134 parte cognitiva, se proporcionó retroalimentación asíncrona a través de material  
135 depositado en una plataforma Moodle institucional, elaborado en *powerpoint* y utilizado  
136 durante el proceso de comunicación docente-alumno a través de videoconferencias  
137 (estas transmitidas en tiempo real).

138 Para asegurar la validez de contenido de la evaluación con relación a los objetivos del  
139 curso, y que las calificaciones asignadas a las tareas de la evaluación fuesen  
140 congruentes con los objetivos expresados en las declaraciones de los resultados  
141 esperados del aprendizaje, se recurrió a los lineamientos de evaluación basados en el  
142 modelo ALOA (Aligning Learning Outcomes and Assessment) desarrollado por Falcão  
143 (2013, p. 1), y cuyo planteamiento teórico deriva del concepto de alineación, término  
144 que pondera que los productos de aprendizaje de un curso o unidad que deben usarse  
145 para definir tanto las actividades de enseñanza y aprendizaje como las tareas de  
146 evaluación.

147 El tipo de evaluación fue de carácter continuo y criterial.

148 Para un primer grupo, con objeto de motivar la participación en tiempo real de los  
149 alumnos en el proceso de evaluación se recurrió a una valoración a través de la  
150 plataforma Kahoot! en complemento a preguntas abiertas a resolver en casa.

151 Se realizaron 16 evaluaciones síncronas con Kahoot!, cada una de ellas al final de  
152 cada una de las 16 semanas del curso; las evaluaciones asíncronas fueron 12  
153 recurriendo al uso de Mathematica por lo menos en la mitad de ellas.

154 Para el segundo grupo, los ítems de la evaluación se orientaron a su solución a través  
155 del software de Mathematica. El número de evaluaciones fue de 32, espaciadas en las  
156 48 sesiones de clase.

157 Para conocer el nivel de satisfacción del estudiantado del primer grupo de estudio con  
158 respecto al proceso de e-evaluación, se tomó como base el instrumento Driscoll  
159 Questionnaire (Curto, Orcos, Blázquez, y Molina, 2019); se adaptó al idioma español  
160 y enriqueció con ítems validados a través de parámetros psicométricos.

161 El instrumento de recopilación de datos presentó una escala tipo Likert con cinco  
162 opciones graduadas del 1 al 5, en el cual el 1 implicaba el nivel más bajo de aceptación  
163 y el 5 el nivel máximo.

164 Para determinar el grado de aceptación del segundo grupo de estudiantes, se utilizó  
165 un instrumento diseñado ad hoc que hacía hincapié en el uso de Mathematica para la  
166 solución de los ítems que conformaron la evaluación sumativa.

167 El análisis de la fiabilidad de los instrumentos se realizó con SPSS 28.

168

### 169 3. Resultados

170

171 Para conocer la opinión del primer grupo de estudiantes, que experimentaron la  
 172 inclusión de Kahoot! en la forma de evaluación, se realizó mediante un cuestionario  
 173 con dos dimensiones *Didáctica* y *Logística*.

174

175 **Confiabilidad y varianza explicada para la evaluación estudiantil del primer**  
 176 **grupo de estudiantes.**

177

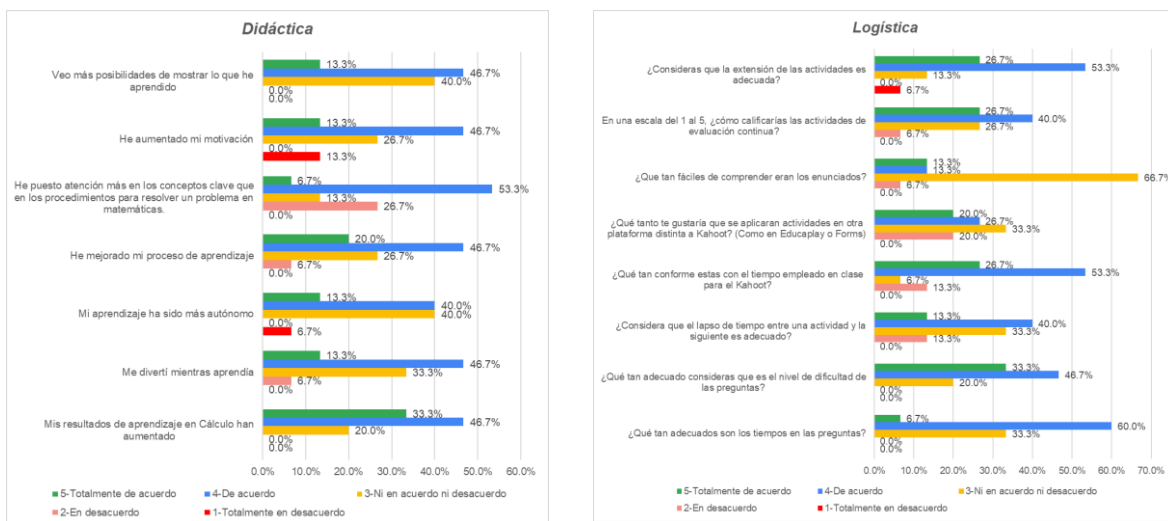
178 Para la dimensión *Didáctica*, el alfa de Cronbach es de 0.912, lo cual implica una alta  
 179 confiabilidad de los resultados de satisfacción en este rubro.

180 Para la dimensión *Logística* el alfa de Cronbach es 0.826, lo cual implica una buena  
 181 confiabilidad de los resultados de satisfacción en este rubro.

182 La varianza explicada la dimensión *Didáctica*, es de 67.380 y para la dimensión  
 183 *Logística* es de 61.317. Estos resultados indican que la información recopilada cuenta  
 184 con un nivel de validez de constructo aceptable.

185 Los resultados de la alineación del proceso de enseñanza con el método de evaluación  
 186 continua se muestran en la Fig. 1. Destaca el ítem que el mejor posicionado  
 187 corresponde al enunciado “*Mis resultados de aprendizaje en Cálculo han aumentado*”,  
 188 aunque también es significativo lo relativo al aprendizaje autónomo.

189 En la Fig. 1 se observan los resultados de la dimensión *logística* que en general hubo  
 190 una buena aceptación de las actividades de la evaluación continua. La percepción de  
 191 la dificultad de los reactivos corresponde al nivel taxonómico expresado en los  
 192 objetivos del programa y en congruencia con el proceso de alineación entre enseñanza  
 193 y evaluación.



194 **Figura 1. Histogramas de frecuencias del cuestionario de satisfacción para la dimensión**  
 195 ***Didáctica* y *Logística*.**

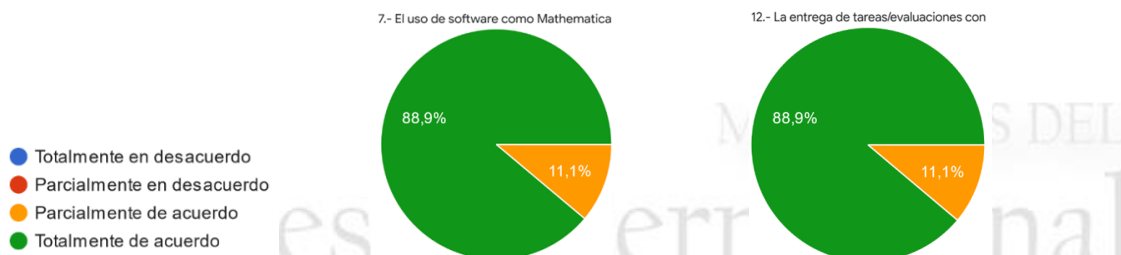
196

197 **Confiabilidad y varianza explicada para la evaluación estudiantil del segundo**  
 198 **grupo de estudiantes.**

199  
 200 La fiabilidad del instrumento de la recogida de datos tuvo una confiabilidad, medida  
 201 con el alfa de Cronbach de .771 y una varianza explicada de 88.431.

202 Con respecto a las opiniones sobre el uso de Mathematica como herramienta  
 203 estratégica en las evaluaciones, los alumnos opinaron: (i) que el uso de Mathematica  
 204 les facilitó la realización de las evaluaciones (ítem 7); (ii) les permitió dedicar más  
 205 tiempo a la comprensión de conceptos y procedimientos (ítem 12) Fig. 2.

206

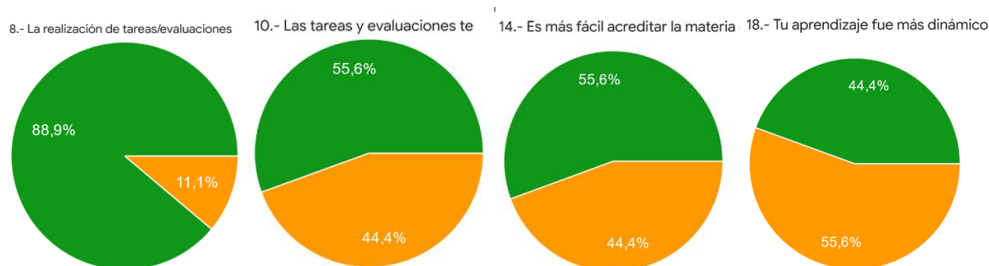


207  
 208  
 209

**Figura 2. Opiniones sobre el uso de Mathematica como herramienta estratégica.**

210 Con relación a la evaluación de sólo tareas de casa en lugar de exámenes, los  
 211 estudiantes manifestaron: (i) la realización de evaluaciones frecuentes les permitió  
 212 mejorar su aprendizaje (ítem 8); (ii) que la forma de evaluar les permitió trabajar a su  
 213 propio ritmo (ítem 10); (iii) que es más fácil acreditar la materia de Cálculo a través de  
 214 evaluaciones continuas en lugar de exámenes (ítem 14); y (iv) que su aprendizaje fue  
 215 más dinámico (ítem 18) Fig. 3.

216



217  
 218  
 219

**Figura 3. Opiniones sobre repercusiones de la evaluación continua.**

220 Con relación al resultado de la aplicación del modelo *Aligning Learning Outcomes and*  
 221 *Assessment* las tareas/evaluaciones se apegaron al 100% a lo visto en las  
 222 presentaciones y videoconferencias de las clases.

223  
 224

## 224 Conclusiones

225

226 La combinación de evaluaciones continuas síncronas y asíncronas, la gamificación y  
 227 el soporte de Mathematica para operaciones rutinarias como elementos relevantes en  
 228 la e-evaluación fueron bien valoradas por los estudiantes.

229 El diseño de las preguntas de las evaluaciones basadas en el modelo *Aligning*  
230 *Learning Outcomes and Assessment* permitió empatar los contenidos enseñados con  
231 los contenidos evaluados.

232 La realización de evaluaciones frecuentes les permitió mejorar su aprendizaje,  
233 evitando la deshonestidad que pudiera presentar el estudiantado por la presión en los  
234 exámenes.

235 Los estudiantes que fueron constantes a lo largo del curso les pareció que es más fácil  
236 acreditar la materia de Cálculo, sin menoscabo del logro de los objetivos.

237 Kahoot mostró ser una herramienta eficaz para la evaluación formativa debido a la  
238 intervención del profesor en tiempo real para la retroalimentación de cada reactivo  
239 durante la aplicación semanal.

240 El cuestionario Driscoll resultó *ad hoc* para medir la satisfacción de la e-evaluación del  
241 curso de Cálculo vectorial y confirma que los alumnos perciben un ambiente lúdico en  
242 su aprendizaje, lo que resulta en un mejor aprovechamiento de sus clases en  
243 matemáticas.

244 El uso de Mahematica permitió que los estudiantes se concentraran más en conceptos  
245 y procedimientos que requieren cierto nivel de análisis para resolver problemas; en vez  
246 distraerse con operaciones algebraicas que no abonaban a sus aprendizajes del  
247 cálculo vectorial.

248 Los resultados de los cuestionarios de opinión, con una confiabilidad probada a través  
249 del alfa de Cronbach, muestran un nivel de satisfacción equivalente entre los dos  
250 grupos muestrales.

251 Dado que la metodología aquí presentada en Cálculo de la e-evaluación es exitosa en  
252 cursos de matemáticas a nivel superior, podría extrapolarse a los cursos presenciales.  
253

## 254 Referencias

255

256 Blanch-Mur, C., Rey-Abella, F. y Floch-Soler, A. (2006). Nivel de conducta académica  
257 deshonestista entre los estudiantes de una escuela de ciencias de la salud, *Enfermería*  
258 *clínica*, 16 (2), 57-62.

259 Coll, C., Rochera, M., Mayordomo, R. y Naranjo, M. (2007). Evaluación continua y  
260 ayuda al aprendizaje. Análisis de una experiencia de innovación en educación superior  
261 con apoyo de las TIC. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa*, 13 5 (3),  
262 783-804.

263 Crisp, G. (s/f). *Teacher's Handbook on e-Assessment*. Transforming Assessment-An  
264 ALTC Fellowship Activity.

265 Curto, M., Orcos, L., Blázquez, P. y Molina, F. (2019). Student Assessment of the Use  
266 of Kahoot in the Learning Process of Science and Mathematics. *Educ. Sci.*, 9 (55)

267 Dominguez-Lara, S. (2016). Inventario de la ansiedad ante exámenes-estado: análisis  
268 preliminar de validez y confiabilidad en estudiantes de psicología. *LIBERABIT*, 22 (2),  
269 219-228.

- 270 Domínguez-Lara, S. (2017). ¿Rendimiento en exámenes o promedio general? Algunas  
271 cuestiones sobre la medición del rendimiento académico en investigación. *Pensando*  
272 *Psicología*, 13 (21), 33-39.
- 273 Falcão, R. (2013). ALOA: a model for Aligning Learning Outcomes and Assessment.  
274 45th EUCEN Conference Transferring Knowledge, In A Globalised World: A UII  
275 Responsibility University of Geneva, Switzerland 29-31 May 2013 CASE STUDY  
276 ALOA: a model for Aligning Learning Outcomes and Assessment.
- 277 G. (2007) *The e-Assessment Handbook*. London, Continuum.
- 278 Gil-Jaurena, I, and Kucina, S. (2016) Aligning learning outcomes and assessment  
279 methods: a web tool for e-learning courses. *International Journal of Educational*  
280 *Technology in Higher Education*, 13 (17), 1-16.
- 281 JISC (s/f) The e-Assessment Glossary (Extended).
- 282 Quesada, R. (s/f). Evaluación del aprendizaje en la educación a distancia en línea.  
283 *RED. Revista de Educación a Distancia*, 1-15. En <http://www.um.es/ead/red/M6>
- 284 Statista Research Department. (2021, agosto 23). América Latina: clases universitarias  
285 online antes y a partir del confinamiento 2020. En  
286 [https://es.statista.com/estadisticas/1195921/clases-universitarias-online-antes-y-](https://es.statista.com/estadisticas/1195921/clases-universitarias-online-antes-y-despues-confinamiento-covid-colombia-mexico-peru/)  
287 [despues-confinamiento-covid-colombia-mexico-peru/](https://es.statista.com/estadisticas/1195921/clases-universitarias-online-antes-y-despues-confinamiento-covid-colombia-mexico-peru/)
- 288 UNESCO. (s/f). Education: From disruption to recovery. En  
289 <https://en.unesco.org/covid19/educationresponse>

# DISEÑO DEL SISTEMA FOTOVOLTAICO PARA SUMINISTRAR DE ENERGÍA ELÉCTRICA UNA TORRE DE TELECOMUNICACIONES EN OAXACA

Rivas Martínez Juan Daniel<sup>1</sup>,\*, Castillo Sánchez Martin Darío<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto Politécnico Nacional, ESIME Zacatenco. Unidad Profesional “Adolfo López Mateos”, Col. Lindavista, C.P. 07738, Delegación Gustavo A. Madero, CDMX. Edif. 2,

AP-POSM003

## Resumen

En el presente trabajo de investigación se calculó y selecciono un sistema fotovoltaico para suministrar de energía eléctrica a los circuitos de una torre de telecomunicaciones que está ubicada en el estado de Oaxaca. Se calculó la demanda total de energía eléctrica requerida por la torre de telecomunicaciones, se realizó un análisis de la geografía del lugar, así como el nivel de insolación promedio mensual y anual de la zona, para determinar los parámetros del sistema de captación, acumulación, conversión, distribución y gasto de la energía eléctrica obtenida del sistema fotovoltaico, se investigó y proporciono información relacionada con los diferentes componentes de un sistema fotovoltaico, así como la descripción de su instalación. Los cálculos financieros demuestran que el proyecto es viable y puede generar un mayor desarrollo económico en la zona, ya que se pueden transmitir mensajes de forma inmediata, permitiendo estar informados de cualquier tipo de noticia o acontecimiento que esté ocurriendo en cualquier parte del mundo.

**Palabras clave:** Torre de Telecomunicaciones, Panel solar, Inversor, Controlador de carga.

## 1. Introducción

Una antena es un objeto que puede transmitir una señal radioeléctrica entre un radio y el ambiente. Las antenas sirven para enfocar la energía en una determinada dirección, enfocando la energía en esa dirección se logra aumentar la intensidad de la señal desde y hacia dicha dirección. El grado de intensidad logrado por la antena se conoce como su ganancia. Entre mayor sea la ganancia de la antena, menor será el ángulo en la cual emite la señal, es por esto por lo que las antenas de alta ganancia son muy directivas. Además, al tener mayor direccionalidad se aumenta la aislación del ruido proveniente de otras direcciones, permitiendo así un doble efecto: mejor señal y menos ruido. En un entorno donde la información a tiempo real es imprescindible para la correcta toma de decisiones, las antenas juegan un papel determinante. Gracias a ellas somos capaces de comunicarnos sin necesidad de cables, tenemos acceso a todo tipo de información en cualquier lugar y en cualquier momento. En la actualidad la telefonía ha facilitado el estilo de vida de todas las personas, pues de esta forma se pueden transmitir mensajes de forma inmediata. Para tener una comunicación telefónica se requiere de una red de torres de telecomunicaciones comunicadas entre ellas para poder expandir la señal telefónica, en ocasiones se necesita torres de enlace, ubicadas en lugares de difícil acceso donde la línea de Media Tensión y Baja Tensión de CFE

<sup>1</sup> \*Autor para la correspondencia. E-mail: drivas-sigmatron@hotmail.com

43 no están presentes por tal motivo, nos encontramos con la dificultad de realizar obras,  
44 conseguir permisos ante municipios y ejidatarios y esperar a que el trámite ante CFE  
45 sea autorizado. (Méndez, 2011).

46 En el presente trabajo de investigación se propone diseñar un sistema eléctrico con  
47 paneles solares que suministren la energía necesaria para los circuitos de la torre de  
48 telecomunicaciones.

## 49 2. Metodología o desarrollo

50

### 51 2.1 Selección del lugar de emplazamiento para el sistema Fotovoltaico.

52 Para poder seleccionar adecuadamente el lugar de emplazamiento se deben tomar en  
53 cuenta diversos factores como son; un estudio económico del lugar, la demanda  
54 eléctrica, la ubicación geográfica.

55

56 **2.1.2 Ubicación geográfica:** El municipio de Salina Cruz, Oaxaca se localiza entre los  
57 paralelos 16°06' y 16°16' de latitud norte; los meridianos 95°08' y 95°18' de longitud  
58 oeste; altitud entre 0 y 800 m. (INEGI,2017).

59

60 **2.1.3 Colindancias:** Colinda al norte con los municipios de Santo Domingo  
61 Tehuantepec y San Pedro Huilotepec; al este con los municipios de San Pedro  
62 Huilotepec, San Mateo del Mar y el Golfo de Tehuantepec; al sur con el Golfo de  
63 Tehuantepec y el municipio de Santo Domingo Tehuantepec; al oeste con el municipio  
64 de Santo Domingo Tehuantepec. Ocupa el 0.14% de la superficie del estado. Cuenta  
65 con 24 localidades y una población total de 76 219 habitantes. (INEGI,2017).

66

67 **2.1.4 Clima:** Rango de temperatura 26 – 28°C. Rango de precipitación 800 – 1 200  
68 mm. Clima Cálido subhúmedo con lluvias en verano (100%). (INEGI,2017).

69

## 70 2.2 Cálculo de los equipos para el sistema fotovoltaico.

71

Tabla 1. Consumo eléctrico diario del módulo.

Cantidad	Equipo	Horas de uso (H)	Potencia (W)	Consumo WH/día
1	Antena repetidora	24	8	192

72

73 Una vez que se tiene el consumo de la antena, se realizara el cálculo para un mes,  
74 teniendo en cuenta los días de utilización con la Ecuación 1.

75

$$Ea = E * 365 \quad Ec. (1)$$

76

77 Para poder calcular el número total de paneles solares que se necesitara, primero tiene que conocer algunos datos, como lo son, el consumo total de energía, ver tabla 1.

78 También la potencia pico del panel en condiciones estándar y la radiación solar del  
79 mes más crítico durante el año.

80 Donde:

81  $E_a$ : Energía anual que demanda la carga ( $kWh/año$ )

82  $E$ : consumo diario total ( $kWh/día$ )

83 Sustituyendo valores tenemos:

84 
$$E_a = 192 * 365 = 70,080 kWh/año$$

85

86 **2.3 Obtención de la radiación solar disponible en la ubicación.**

87 Para el diseño de instalaciones fotovoltaicas, y con el fin de poder evaluar la energía  
88 que puede producir la instalación en cada mes de año, se define el concepto de  
89 número de horas de sol pico (HSP) del lugar en cuestión, y que representa las horas  
90 de sol disponibles a una hipotética irradiación solar constante de  $1000 W/m^2$ .

91 De la información obtenida de la NASA para la radiación solar se encontró que el  
92 periodo más bajo de radiación solar fue de  $5.0 kWh/m^2/día$ , el cual es reportado  
93 durante el mes de Diciembre, mientras que el promedio del año fue de  $5.8 kWh/m^2/día$ ,  
94 por lo que para calcular la cantidad mínima de paneles fotovoltaicos necesarios para  
95 satisfacer la demanda de energía eléctrica de  $192 kWh/día$ , se recurrirá al uso en la  
96 Ecuación 2, donde el valor de HPS a utilizar será el del mes más bajo, en este caso  
97 fue el mes de Diciembre, con esto se garantiza que si existe una baja radiación solar  
98 no se comprometa el sistema de alimentación fotovoltaica. (Harper,2010), y  
99 (Alonso,2004).

100

101 
$$HSP = \frac{\text{Radiación solar de la zona}}{1kW/m^2} \quad Ec. (2)$$

102 
$$HSP = \frac{5.0 kW}{\frac{m^2}{1 kW/m^2}}$$

103  $HSP = 5.0$

104 **2.4 Cálculo del número de paneles requeridos.**

105 Para calcular el número de paneles solares necesarios para satisfacer la demanda  
106 eléctrica prevista de  $192 kWh/día$ , se empleará la Ecuación 3, en función del  
107 emplazamiento y tipo de panel solar que se vaya a instalar:



$$108 \quad M = \frac{E_C * F_S}{I_M * V_M * HSP * N_{BAT} * N_{INV}} \quad Ec. (3)$$

109 Donde:

110 M = Numero de módulos solares

111 Ec = Energía Consumida diariamente por la antena (W/día)

112 Fs. = Factor de sobredimensionamiento del Sistema (se sobre dimensiona 10% a  
113 20%)

114 Fs. = 1.1 a 1.2

115 Im = Corriente del módulo solar 8.63 Amperes. (máxima insolación 1 kW/m<sup>2</sup>)

116 Vm = Voltaje promedio de operación del módulo solar 31.87 Volts (No confundirlo con  
117 el voltaje de baterías).

118 HSP = Radiación de la localidad en el mes de menor insolación expresada en horas  
119 máximas de insolación 5.0 kW/m<sup>2</sup>)

120 Ninv. =Eficiencia del inversor CD/CA en caso de que el equipo opere en:

121 C.A.= valores típicos 0.8 a 0.9

122 C.D. = valor de 1

123 NBAT = Eficiencia de carga de la batería 0.87 a 0.9

124

$$125 \quad M = \frac{(192 W)(1.2)}{(31.87V)(8.63A)(5.0)(1)(0.87)}$$

126

$$127 \quad M = 0.19 \approx 1 \text{ panel}$$

128 Por lo tanto, se seleccionó el panel solar de 275 Watts, 60 células policristalino, con  
129 una tensión de 31.87 Volts y una corriente 8.63 amperes, con una eficiencia del módulo  
130 de 16.9%. Fabricado por ERA SOLAR. Modelo BSP275P

### 131 2.5 Cálculo del número de baterías.

132 Para calcular la capacidad de las **baterías de acumulación**, primero se establece  
133 la **autonomía deseada** en caso de tener días desfavorables sin insolación por  
134 abundante nubosidad se utiliza la Ecuación 4. (Harper,2010), y (Alonso,2004).

$$135 \quad C_B = \frac{A_U * E_C}{V_B * F_U * N_{INV}} \quad Ec (4)$$

136 Donde:

137 CB = Capacidad del banco de baterías.

138  $E_C$  = Energía consumida por día.

139  $A_U$  = Autonomía deseada en el banco de baterías (días) varía entre 4 días con Buena  
140 insolación y hasta 10 días para lugares nublados.

141  $F_U$  = Fracción de la capacidad total de la batería que se usa para dar autonomía de  
142 diseño del Sistema evitando que la batería se descargue totalmente. Voltaje nominal  
143 al cual trabajara el banco de baterías.

144  $F_U = 0.5$  para baterías de placa delgada.

145  $F_U = 0.8$  para baterías de placa gruesa.

146  $F_I$  = Factor de incremento de la capacidad de la batería respecto a su valor nominal  
147 comercial como resultado de una razón (tiempo) de descarga.

148 Este valor varía desde 1.05 en baterías de placa delgada hasta 1.35 en baterías de  
149 placa gruesa tipo tubular.

150 
$$C_B = \frac{(10) \cdot (192)}{(12) \cdot (0.8) \cdot (1)} = \frac{1920}{9.6} = 200 \text{ Ah}$$

151

## 152 **2.6 Numero de baterías:**

153 Corresponde al cálculo para identificar el número total de acumuladores o baterías que  
154 deben de usar para soportar la corriente del Sistema de acuerdo con el cálculo  
155 realizado previamente, Ecuación 5. (Harper,2010), y (Alonso,2004).

156 
$$N_B = \frac{C_B}{C_R} \quad \text{Ec. (5)}$$

157 Donde:

158  $N_B$  = Número de baterías que se necesitan

159  $C_R$  = Capacidad de energía requerida para funcionar en días nublados (Ah).

160  $C_B$  = Capacidad de la batería (Ah)

161  **$N_B = 200 \text{ Ah} / 260 \text{ Ah} = 0.8 \approx 1$  Batería.**

162 De acuerdo con las especificaciones requeridas. Se utilizará la Batería Sellada Blue  
163 260Ah 12V. Marca Tensite. Modelo EFB HEAVY 12-260

164

## 165 **2.7 Controlador de carga.**

166 Es el que limita la energía que se le suministra a la Batería, cuando la Batería ya está  
167 cargada, si se le sigue suministrando energía, se calienta y se podría generar una  
168 situación peligrosa, Ecuación 6. (Harper,2010), y (Alonso,2004).

169 
$$I_{MAX} = I_{SC} * N_P \quad \text{Ec. (6)}$$

170 Donde:

171  $I_{MAX}$  = Corriente máxima

172  $I_{SC}$  = Corriente de corto circuito del panel

173  $N_P$  = Numero de paneles a usar.

174  $I_{MAX} = I_{SC} * N_P$

175  $I_{MAX} = 9.2 \text{ A} * 1 \text{ panel}$

176  $I_{MAX} = 9.2 \text{ A}.$

177 Por lo tanto, se selecciona un Controlador Solar de Carga y Descarga, con un Voltaje  
 178 de trabajo de 12 a 24V con Autodetección, y Corriente de carga de 10A y 20A.

179 Marca: Auto Solar. Modelo: PC1500B-10-20.

180 Este controlador permite mantener las baterías en un estado óptimo de carga evitando  
 181 que estas lleguen a la descarga completa.

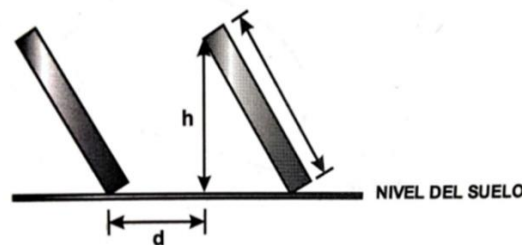
182 **2.8 Cálculo del Angulo de inclinación y del Angulo de orientación.**

183 Para determinar el Angulo de inclinación de los paneles fotovoltaicos, se debe utilizar  
 184 el valor de la latitud del lugar donde se encuentra localizada la antena a la cual se le  
 185 sumaran  $5^\circ$ , Ecuación 7. (Harper,2010), y (Alonso,2004).

186 
$$\angle INC + \angle LAT = 16^\circ 06' + 5^\circ = 21^\circ 06' \text{ al sur} \quad \text{Ec. (7)}$$

187 **2.9 Cálculo del área del arreglo fotovoltaico.**

188 Para el dimensionamiento del área total del arreglo fotovoltaico primeramente se debe  
 189 calcular el espaciamiento entre paneles para evitar que existan sombras causados por  
 190 los paneles adyacentes, para esto se hacen las consideraciones siguientes:

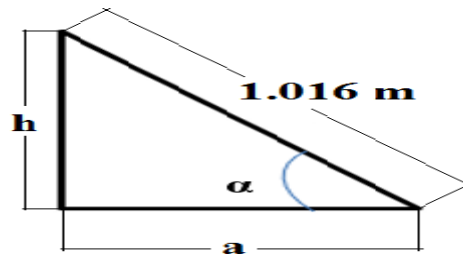


191

192 **Figura 2. Separación entre paneles. (Fuente: Aula fácil)**

193 El diseño de la instalación se considera para el Municipio Salina Cruz en el Estado de  
 194 Oaxaca. (latitud  $16^\circ 06'$ ).

195 Es necesario determinar la separación entre paneles para evitar sombras entre los  
 196 arreglos, para esto es necesario realizar los siguientes cálculos.



197

198

**Figura 3. Representación de la inclinación de paneles. (Fuente: Propia).**

199

Realizando los cálculos de  $h$  se obtiene para Salina Cruz, en Oaxaca.

200

$$h = 1.016 * \text{sen}(16.1) = 0.28 \text{ m}$$

201

Posteriormente se debe determinar un factor  $k$  en función de la latitud del lugar de  
 202 instalación, para esto se ocupa la Ecuación 8

203

$$k = \frac{1}{\tan(61 - \text{latitud})} \quad \text{Ec. (8)}$$

204

sustituyendo valores se obtiene:

205

$$k = \frac{1}{\tan(61 - 16.1)} = 1.0$$

206

Finalmente, el espaciamiento entre paneles será el producto del factor  $k$  por la  
 207 distancia  $h$  obteniendo como resultado, Ecuación 9.

208

$$d = k (h) \quad \text{Ec.(9)}$$

209

$$d = 1.* 0.30 = 0.3 \text{ m}$$

210

Una vez calculada la distancia de separación entre paneles es necesario calcular la  
 211 distancia mínima entre aristas de paneles para evitar sombra ( $d_{\min.}$ ) añadiendo la  
 212 porción restante del panel inferior a la arista superior del mismo respecto a la horizontal  
 213 en metros, Ecuación 10.

214

$$(d_{\min.}) = \text{hip.} [\cos (\text{latitud})] + d \quad \text{Ec. (10)}$$

215

Donde:

216

$d_{\min.}$ : Distancia mínima entre aristas de paneles para evitar sombras en metros

217

$L$ : longitud del panel en metros

218

$h$ : altura solar al medio día en metros.

219

$\alpha$ : Grado de inclinación del panel con respecto a la horizontal en grados ( $^{\circ}$ ).

220

$\theta$ : Ángulo de la sombra respecto a la horizontal en  $^{\circ}$ .

221

$a$ : distancia de la arista inferior del panel a la arista superior del mismo respecto a la  
 222 horizontal en metros.

223 **d**: distancia de la arista inferior del panel a la arista inferior del otro en metros.

224 Por lo tanto, la distancia mínima de separación entre paneles corresponde a:

$$225 \quad d_{min} = (1.016)(\cos(16.1)) + d = 0.97 + 0.3 = 1.28m$$

## 226 **2.10 Cálculo del inversor.**

227 De acuerdo con el cálculo realizado se considera la capacidad que deberá de tener el  
228 inversor para el Sistema y convertir la energía de corriente directa a alterna, Ecuación  
229 11. (Harper,2010), y (Alonso,2004).

$$230 \quad INV = W_1 + W_2 \dots\dots W_N \quad Ec. (11)$$

231

232 Donde:

233 INV = Potencia del inversor (Watts)

234 W = Potencia de cada una de las cargas (Watts)

235 INV = 1000 Watts

236 Se seleccionó, el Inversor Marca: MUST SOLAR. Modelo: 600W, 12V rango 12V a  
237 220V. Ideal para transformar la corriente continua que genera la instalación solar en  
238 corriente alterna 220V, 50 a 60Hz.

## 239 **2.11 Cálculo de corriente para la selección de las protecciones.**

240 Los valores utilizados, fueron tomados de la potencia de salida que proporciona cada  
241 inversor; las protecciones seleccionadas serán localizadas del lado de salida del  
242 inversor, lado de corriente alterna.

243 Se calcula la corriente eléctrica nominal, con la utilización de la ley de Watt con la  
244 Ecuación 12.

$$245 \quad P = V \times I \quad Ec. (12)$$

246 Dónde:

247 P= Potencia (W)

248 V= Tensión (Volt)

249 I= Corriente (Ampere)

250 Despejando "I" se obtiene la Ecuación 13.

$$251 \quad I = \frac{P}{V} \quad Ec. (13)$$

252 Corriente nominal resultante para una potencia de 1kW

253

$$I = \frac{1 \times 10^3}{220} = 7.874 \text{ A}$$

254 De acuerdo con el artículo 690-1 de la Norma Oficial Mexicana el primer elemento de  
255 protección es el fusible o elemento de protección contra sobre corriente y debe ser  
256 dimensionado a un valor no menor al 125% de la corriente Aplicando el  
257 sobredimensionamiento de la protección:

258

$$I = 1.25 \times 7.874 = 9.842 \text{ A}$$

259 Dada la corriente resultante se selecciona una protección eléctrica tipo fusible,  
260 normalizado a una corriente de 10 A.

261 **2.12 Cálculo del calibre entre el panel y el controlador de carga, Ecuación 14.**

262

$$A = \frac{2 * P * I * L}{\Delta E} \quad \text{Ec. (14)}$$

263 Donde:

264 A = Área del conductor.

265  $\rho$  = Resistividad del cobre  $0.01785 \Omega \text{mm}^2/\text{m}^2$ .

266 I = Corriente del conductor.

267 L = Longitud del conductor.

268  $\Delta E$  = Caída de tensión (V).

269 e% = Caída de tensión no mayor a 3%

270 V = Tensión (V).

271 0.85 Factor de ajuste para conductor expuestos a la radiación solar

272 **2.13 Cálculo de la caída de tensión  $\Delta E$ , Ecuación 15. [4].**

273

$$\Delta E = \frac{v * e\%}{100} \quad \text{Ec. (15)}$$

274

$$\Delta E = \frac{31.87 \text{ V} * 3\%}{100} = 0.956 \text{ V} ; A = \frac{2 * 0.01786 * 8.63 * 10}{0.956} = 3.22 \text{ mm}^2$$

275 Por lo tanto, de acuerdo con las tablas 310 – 15 de la Norma Mexicana 001-SEDE-  
276 2012, (anexo 5) el calibre del conductor AWG que le corresponde es el calibre 12.

277 **2.14 Cálculo del calibre entre el controlador de carga y la batería.**

278

$$A = \frac{(2) * (0.01785) * (8.63) * (15)}{0.956} = 4.83 \text{ mm}^2$$

279 Por lo tanto, de acuerdo con la Norma Oficial Mexicana 001-SEDE-2012  
280 (anexo 5) el calibre del conductor AWG que le corresponde es el calibre 10.

281

282

283 **2.15 Cálculo del calibre entre el controlador de carga y el inversor.**

284 
$$A = \frac{2 \cdot 0.01786 \cdot 8.63 \cdot 30}{0.956} = 9.67 \text{ mm}^2$$

285 Por lo tanto, de acuerdo con la Norma Oficial Mexicana 001-SEDE-2012 (anexo 5) el  
 286 calibre del conductor AWG que le corresponde es el calibre 8.

287

288 **3. Resultados y análisis**

289

290 De acuerdo con los cálculos obtenidos para la transmisión de datos situado  
 291 aproximadamente a 17 kilómetros en línea recta de la base en Salina Cruz a el  
 292 municipio de Santo Domingo Tehuantepec, en el estado de Oaxaca. Se seleccionó la  
 293 Antena Rocket M5. Debido al bajo consumo de energía y por su alto rendimiento,  
 294 cumple con las características requeridas para este proyecto inalámbrico punto a  
 295 punto, en la tabla 2. Están las Especificaciones técnicas de la Antena.

296

297 **Tabla 2. Especificaciones técnicas Antena Rocket M5**

Dimensiones	160x80x44 mm (6.30x3.15x1,73)	Consumo máximo de energía	(4) 8W
Peso	350g (12.35 oz.)	Suministro de energía	(5) 48 V, 0.5 A Adaptador PoE
Características de recubrimiento	Aluminio fundido a presión	Método de suministro de energía	Pasivo PoE (Pares 4,5+;7,8 Regreso) (6) 802.3af pasivo
Procesador	MIPS 74kc	Protección ESD/EMP	± 30 KV aire
Memoria	128 SDRAM, 8MB Flash	Temperatura de operación	-30 a 75° C (-22 a 167° F)
Interfaces de red	(1) 10/100/1000 Mbps 10/100 Mbps	Humedad de operación	5 a 95% sin condensación
Conexiones RF	(2) RP-SMA (Impermeable), 1 SMA, (GPS)	Vibración	ETS1300-019-1.4
Leds	3) Encendido, 2 (Ethernet), 6Intensidad de señal, GPS		

298 Para el diseño de la instalación de la Antena de Telecomunicaciones se seleccionaron  
 299 los equipos, de acuerdo con los cálculos obtenidos anteriormente ver tabla 3.

300 1 euro = \$23.52 (8/02/2022)

301 **Tabla 3. Costos de Equipos para la instalación de la antena**

Descripción	Modelo	Cantidad	Precio Unitario MXN	Total, MXN
Panel solar 275W 60 células	BSP25P	1	3190.6	3190.6
Regulador de Carga 14 VCD	PC1500B-10-20	1	977.13	977.13
Inversor cargador 600W 12 Vcd	EP20-500	1	4848.74	4848.74
Batería Blue 260 Ah 12 V tensión	Tensite EFB Heavy 12-260	1	6,679.00	13,358.0
Montaje panel solar para 2 módulo prose-8512 en poste y 1 módulo prose- 8512 en torre.	SSPBLV5	1	1,259.0	1,259.0
Rocket Dish.		2	3,699.0	7,398.0
2 antena Rocket M5	M5	2	2,299.00	4,598.00
Gabinete Metálico De Seguridad Para 2 Baterías Y/o Equipo		1	3,385.00	3,385.00
<b>TOTAL</b>				<b>39,014.47</b>

302  
303

**Costo total del proyecto ver tabla 4.**

304  
305

**Tabla 4. Costo total proyecto (Equipo y mano de obra**

Concepto	Costo total M.N.
Equipo	39,014.47



Mano de Obra	45,000
<b>TOTAL</b>	<b>84,014.47</b>

306

### 307 **3.1 Análisis Económico**

308 A continuación, se desarrolla el análisis económico del proyecto, el cual es un estado  
309 de resultados y un costo beneficio. Para determinar si el proyecto será viable o no.  
310 Para poder realizar el siguiente análisis primero se tiene que conocer el total de la  
311 inversión del proyecto ver tabla 3 y 4. La inversión sería de \$84,014.47, tomando en  
312 cuenta que el precio por minuto utilizando un teléfono celular es de \$0.85 por minuto.  
313 Tomando un promedio entre la población económicamente activa entre el municipio  
314 de Salina Cruz y el municipio de Santo Domingo Tehuantepec en el estado de Oaxaca  
315 de aproximadamente 22,115 habitantes respectivamente considerando únicamente el  
316 15% de la población que utilizara un celular por 10 minutos al día.

317  **$10 \text{ min p/habitante} \times \$0.85 \text{ p/min} \times 3,317 \text{ habitantes} = \$ 28,194.5$**

318 La inversión por parte de la compañía de Telefonía se estaría recuperando en tres  
319 días, si tomamos en cuenta que los equipos tienen un tiempo de vida útil de más de  
320 20 años, este es un proyecto viable.

### 321 **4. Conclusiones**

322

323 El proyecto es viable, ya que la inversión que realizara la compañía de telefonía se  
324 recuperara en tan solo tres días de operación de la instalación del sistema de  
325 Telecomunicaciones, las condiciones geográficas del lugar y la baja accesibilidad al  
326 servicio eléctrico nacional permiten que este tipo de instalaciones de generación  
327 eléctrica se vuelvan una opción importante para lugares de difícil acceso. El objetivo  
328 fundamental de este proyecto fue el diseñar un sistema de paneles solares para  
329 energizar una torre de telecomunicaciones ubicada en el municipio de Salina Cruz en  
330 el Estado de Oaxaca, siendo este un sitio remoto y de difícil acceso a la red eléctrica.  
331 Con esta propuesta se puede acelerar la energización de la torre, en comparación con  
332 los trámites que se requieren para realizar la obra de media tensión. Además, podemos  
333 darnos cuenta de que hay otras formas de energizar un equipo, así como no podemos  
334 depender de una sola empresa suministradora de energía eléctrica. ya que ahora  
335 tenemos la posibilidad de energizar con un sistema de paneles solares sin depender  
336 de grandes obras en media y baja tensión. La crisis energética que enfrenta México  
337 en la actualidad aunado al calentamiento global ha llevado a la sociedad a buscar  
338 nuevas alternativas de producción de energía eléctrica con las cuales puedan  
339 satisfacer sus necesidades y a la vez, que sean amigables con el medio ambiente. Los  
340 sistemas fotovoltaicos son la mejor opción para satisfacer las necesidades de energía  
341 eléctrica que requiere México.

342

343 **5. Índice de referencias**

- 344 • Méndez María, Cuervo Rafael. (2011). *Energía Solar Fotovoltaica*. Madrid:  
345 Editorial: Fundación Confemetal.
- 346 • Vega de Kuiper Juan, Santiago Morales. (2014). *Fuentes de energía renova-*  
347 *bles y no renovables, aplicaciones*. Colombia: editorial: Alfaomega grupo edi-  
348 torial.
- 349 • Madrid Vicente. (2009). *Curso de energía solar Fotovoltaica, Térmica y Termo-*  
350 *eléctrica*. España: Editorial: Mundi-Prensa Libros, S.A.
- 351 • Harper Enríquez. (2010). *Instalaciones eléctricas domesticas convencionales y*  
352 *solares fotovoltaicos*. México: Editorial: Limusa.
- 353 • Lorenzo Eduardo. (1994). *Electricidad Solar, Ingeniería de los sistemas*  
354 *fotovoltaicos*. Sevilla: Editorial: Progensa.
- 355 • Alonso Abella, M. (2004). *Sistemas fotovoltaicos introducción al Diseño y*  
356 *dimensionamiento de instalaciones de energía solar fotovoltaica*. Madrid.  
357 Editorial: SAPT.
- 358 • Pérez M. (2001). *Prácticas de Energía Solar para estudiantes de ciencias e*  
359 *Ingeniería*. Almería: Ed: Servicio de publicaciones de la Universidad de Almería.
- 360 • INEGI. (2017). *Prontuario de información Geográfica Municipal de los Estados*  
361 *Unidos Mexicanos, Salina Cruz, Oaxaca*. [En línea]. Obtenido en enero de 2022  
362 de la dirección:  
363 [https://mx.search.yahoo.com/search?fr=mcafee&type=E211MX1274G0&p=ine](https://mx.search.yahoo.com/search?fr=mcafee&type=E211MX1274G0&p=inegi+prontuario+salina+cruz+oaxaca)  
364 [gi+prontuario+salina+cruz+oaxaca](https://mx.search.yahoo.com/search?fr=mcafee&type=E211MX1274G0&p=inegi+prontuario+salina+cruz+oaxaca)
- 365 • IDET. (2020). *Torres de Telecomunicaciones: competencia para funcionar*  
366 *mejor*. [En línea]. Obtenido en enero de 2022 de la dirección:  
367 [https://www.idet.org.mx/consumidores/torres-telecomunicaciones-](https://www.idet.org.mx/consumidores/torres-telecomunicaciones-competencia-funcionar-mejor/)  
368 [competencia-funcionar-mejor/](https://www.idet.org.mx/consumidores/torres-telecomunicaciones-competencia-funcionar-mejor/)
- 369 • AULA FACIL. (2021). *Cálculos de sombras y distancias*., [En línea]. Obtenido  
370 en febrero de 2022 de la dirección: [https://www.aulafacil.com/cursos/medio-](https://www.aulafacil.com/cursos/medio-ambiente/energia-solar-termica-1/calculos-de-sombras-y-distancia-l37843)  
371 [ambiente/energia-solar-termica-1/calculos-de-sombras-y-distancia-l37843](https://www.aulafacil.com/cursos/medio-ambiente/energia-solar-termica-1/calculos-de-sombras-y-distancia-l37843)

## MÉTODO DEL PUNTO FIJO O APROXIMACIONES SUCESIVAS PARA UNA RAÍZ SIMPLE

Gutiérrez Armenta Esiquio Martin<sup>1,\*</sup>, Gutiérrez Villegas Marco Antonio<sup>2</sup>, Cruz Sandoval Alejandro<sup>3</sup>, Gutiérrez Villegas Israel Isaac<sup>4y6</sup>, y Flores Sánchez Daniel<sup>5</sup>.

<sup>1</sup>Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Politécnico Nacional Edificio 5, Unidad Profesional Adolfo López Mateos Zacatenco, Col. Lindavista, C.P. 07340, Ciudad de México, México.

<sup>2,3</sup>Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco Departamento de Sistemas, Área Sistemas Computacionales. Avenida San pablo No 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, Ciudad de México, México.

<sup>4</sup>Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, División de Ingeniería Computacionales, Av. Tecnológico S/N C.P. 55210 Col. Valle de Anáhuac, Ecatepec de Morelos, Estado de México.

<sup>5</sup>Universidad Autónoma Metropolitana. Unidad Azcapotzalco Departamento de Materiales, Área de Ciencia de Materiales. Avenida San pablo No 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, Ciudad de México, México.

<sup>6</sup>Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional, Av. Instituto Politécnico Nacional Edificio 9, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07738, Ciudad de México, México

AP-POSM004

### Resumen

El método del Punto Fijo, también denominado de "sustituciones sucesivas" se basa en un esquema iterativo obtenido a partir de un reordenamiento de la función  $f(x)$ . La finalidad de este artículo es la de proporcionar puntos claves que pueden ayudar en el desarrollo de este método, ya que no solo se ha utilizado para calcular raíces de una ecuación no lineal, sino también ecuaciones diferenciales con valor inicial y ecuaciones integro-diferenciales, así como aplicaciones que se han realizado en física, matemáticas puras y en otras áreas.

**Palabras clave:** punto fijo, aproximaciones sucesivas, raíces.

### 1. Introducción

El primero en proponer el método del punto fijo fue H. Poincaré en 1886. Años después se utiliza el espacio métrico que fue introducido por M. Frechet en 1906, lo que

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: esiqv11@hotmail.com Tel. 55 1339-1343

41 proporcionó el desarrollo de un gran número de aportaciones en matemáticas, física y  
42 otras áreas del conocimiento, en los que aparece los espacios normados o distancia  
43 en espacios de Banach, y que en este caso es cerrado y convexo. El primer teorema  
44 del punto fijo se debe a L.E.J. Brouwer en 1912. La teoría del punto fijo ha jugado un  
45 papel importante en los problemas del análisis funcional no lineal, que es la  
46 combinación de análisis, topología y álgebra. En 1967, B.N. Sadovski plantea un  
47 teorema del punto fijo que establece que si es un espacio de Banach,  $X$  es un  
48 subconjunto cerrado, acotado y convexo del espacio  $E$ . Un mapeo de un  
49 dominio  $f: X \rightarrow E$  entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $X$ . En 1968 Browder estableció el  
50 siguiente teorema. Sea  $K$  un subconjunto compacto convexo no vacío de un espacio  
51 vectorial topológico. Sea  $T$  un mapa de  $K$  en  $2^K$ , donde para cada  $x \in K$ ,  $T(x)$  es un  
52 subconjunto convexo no vacío de  $K$ . Suponga además que para cada  $y$  en  $K$ ,  $T_1(y) =$   
53  $\{x \in K, : y \in T(x)\}$ . Entonces existe  $x_0$  en  $K$  tal que  $x_0 \in T(x_0)$ , Dinesh Panthi (2018)  
54 establece algunos resultados de punto fijo compatibles que satisfacen condiciones  
55 contractivas de espacios métricos.

56 Una de las aplicaciones es en la ecuación integro-diferencial de Fredholm dada por  
57  $x(t) = \int_a^b f(t, s, x(s), x'(s)) ds + g(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , donde  $f: [a, b] \times [a, b] \times X \rightarrow X$  es  
58 continua,  $X$  es un espacio de Banach y  $g \in C^1([a, b], X)$ . Para encontrar el punto fijo esta  
59 ecuación se lleva a un sistema de ecuaciones derivando con respecto a  $t$  que se  
60 reducen al siguiente sistema de ecuaciones integrables,  $x(t) =$   
61  $\int_a^b f(t, s, x(s), y(s)) ds + g(t)$ ,  $\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(t, s, x(s), y(s)) ds + g'(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , y que es una  
62 manera un poco más compleja del método.

63 Para nuestro caso se abordará solo para el cálculo de una raíz simple, para esto se  
64 necesita que sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, de la cual se quiere escribir de la  
65 forma:

66 **Ecuación 1.**  $x = G(x)$

67 De la ecuación 1, se debe de cumplir que:

68 **Ecuación 2.**  $f(x) = x - G(x)$

69 Se propone un  $x_0$  arbitrario así la forma iterativa de ecuación 1 se obtiene la ecuación  
70 3.

71 **Ecuación 3.**  $x_{n+1} = G(x_n)$

72 De la ecuación 3 se generar una sucesión de puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

73 El criterio de paro es:

74 **Ecuación 4.**  $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$

75 donde  $\varepsilon$  es el error o tolerancia de la aproximación.

76 Orden de convergencia:

77 Una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia se expresa fácilmente  
78 en términos de la primera derivada de  $g(x)$  esta tiene que ser continua y utilizando el  
79 teorema del valor medio del cálculo elemental, que establece que para todo  $x \in$   
80  $(a, b)$  y  $|g'(x)| < M < 1$  para todo  $x \in (a, b)$  el método converge y se obtiene la  
81 siguiente relación dada por la ecuación 5:

82 **Ecuación 5.**  $g(b) - g(a) = g'(x)(b - a)$

83 Ahora considere la expresión  $|x_{n+1} - x_n|$ , donde los valores de  $x_i$  se repiten en la  
84 fórmula iterativa siguiente:

85 **Ecuación 6.**  $x_{n-1} = g(x_n)$

86 Tenemos por el teorema del valor medio, para algún  $x$  entre  $x_{n+1}, x_n$  que:

87 **Ecuación 7.**  $|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| = |g'(x)(x_{n+1} - x_n)|$

88 Una demostración se encuentra realizado por Chuck Allison (2006). Suponga que  
89  $g'$  está limitado en magnitud por algún número  $M$ , en un intervalo lo suficientemente  
90 grande que contienen todos los  $x_i$ , entonces se obtiene el siguiente desarrollo:

91 **Ecuación 8.**  $|x_{n+1} - x_n| \leq M|x_n - x_{n-1}| = M|g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})|$

92 **Ecuación 9.**  $\leq M^2|x_{n-1} - x_{n-2}|$

93 **Ecuación 10.**  $= M^2|g(x_{n-2}) - g(x_{n-3})|$

94 **Ecuación 11.**  $\leq M^2|x_{n-2} - x_{n-3}|$

95 hasta:

96 **Ecuación 12.**  $\leq M^n|x_{n-2} - x_{n-3}|$

97 Por tanto, una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia es  $M < 1$ ,  
98 o más bien,  $|g'(x)| < M < 1$  para todas las  $x$  en un intervalo de interés, entonces, si  
99  $x$  es un punto que se aproxima a la raíz, y que se expresa por medio de las ecuaciones  
100 13 y 14:

101

102 **Ecuación 13.**  $|x_{n+1} - x_n| \leq M^n|x_{n-2} - x_{n-3}|$

103 **Ecuación 14.**  $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n-2} - x_{n-3}|} \leq M^n$

104 Y que demuestra que el orden de convergencia lineal se cumple si:  $0 \leq M < 1$ .

105

106 **2. Metodología o desarrollo**

107

108 Este método tiene una desventaja debida que hay diferentes maneras de encontrar la  
 109 ecuación (1), por esta razón es un poco complicado, pero si se encuentra una  $G(x)$   
 110 adecuada converge rápidamente a la solución. Así que se dan dos ejemplos para  
 111 encontrar la mejor y apropiada  $G(x)$ .

112 **Ejemplo 1.**

113 Sea la ecuación 15:

114 **Ecuación 15.**  $f(x) = x^2 - 2 = 0$

115 Entonces se obtienen:

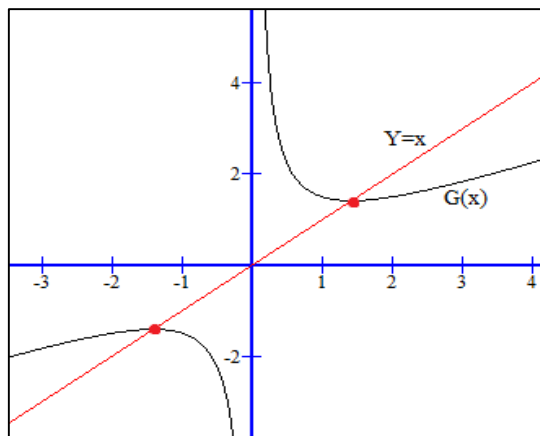
116 **Ecuación 16.**  $x = x^2 + x - 2$  donde  $G(x) = x^2 + x - 2$

117 **Ecuación 17.**  $x = \frac{2}{x}$  donde  $G(x) = \frac{2}{x}$

118 **Ecuación 18.**  $x = \pm\sqrt{x}$  donde  $G(x) = \pm\sqrt{x}$

119 **Ecuación 19.**  $x = \frac{(x+\frac{2}{x})}{2}$  donde  $G(x) = \frac{(x+\frac{2}{x})}{2}$

120 Así que cualquier función continua  $f(x)$  sea algebraica, trascendental, exponencial o  
 121 combinaciones de estas, pueden tener varias  $G(x)$ . Esto es uno de los problemas que  
 122 complican su aplicación. El otro es la aplicación del criterio de convergencia del  
 123 método. Entonces,  $y = x$  donde  $y = G(x) = \frac{(x+\frac{2}{x})}{2}$  graficando esta se observa que  
 124 tienen dos puntos fijos.



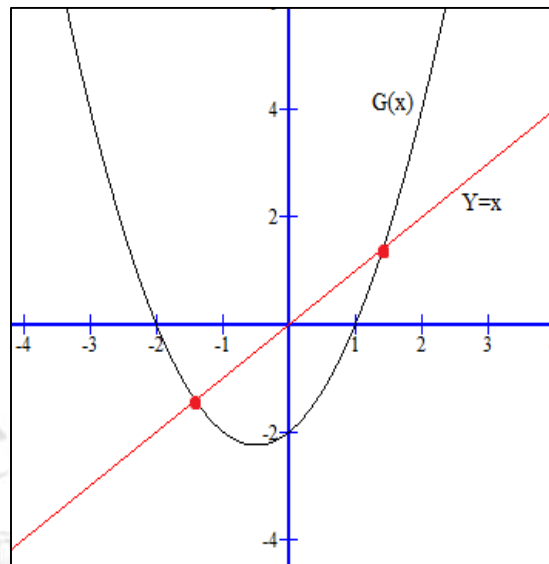
125

126

**Figura 1.**

127 En la figura 1 los puntos rojos representan los puntos fijos.

128 Para las siguientes ecuaciones:  $y = x$  donde  $y = G(x) = x^2 + x - 2$ , y la gráfica de  
 129 estas dos funciones está representada en la figura 2:



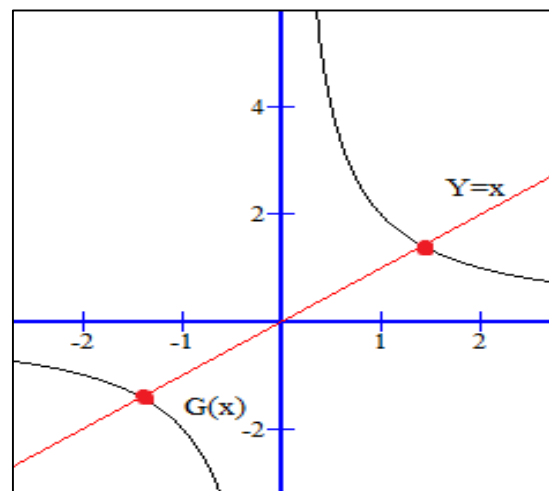
130

131

**Figura 2.**

132 Y se muestran dos puntos fijos.

133 En la figura 3 se muestra la gráfica 3 para las ecuaciones  $y = x$  donde  $y = G(x) = \frac{2}{x}$



134

135

**Figura 3.**

136 Y se muestran dos puntos fijos.

137

138 **Ejemplo 2.**

139 Considere la ecuación no lineal  $x^3 = 2x + 1$

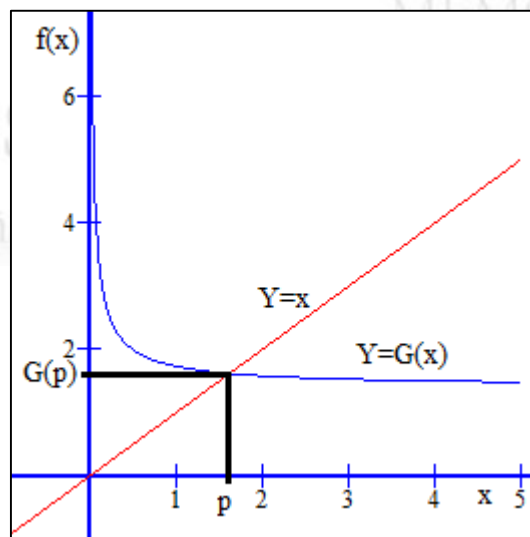
140 .

141 **Ecuación 20.**  $x = \frac{x^3-1}{2}$  ,  $G(x) = \frac{x^3-1}{2}$

142 **Ecuación 21.**  $x = \frac{1}{x^2-2}$  ,  $G(x) = \frac{1}{x^2-2}$

143 **Ecuación 22.**  $x = \sqrt{\frac{2x+1}{x}}$  ,  $G(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x}}$

144



145

146

**Figura 4.**

147 Se muestra gráficamente en la figura 4, que  $G(p)$  tiene un único punto fijo en  $p \in [1,2]$ .

148

149 **Teorema 1.**

150 Si  $G \in C^1[a, b]$  y  $G(x) \in [a, b]$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces  $G$  tiene un punto fijo en  $[a, b]$ ,

151 si además  $G'(x)$  existe y es continua en  $(a, b)$ , entonces  $G(x)$  tiene un único punto  $p$

152 en  $(a, b)$  y  $G'(x) \leq k < 1$ , para todo  $x \in (a, b)$ .

153 **Demostración:**

154

155 Si  $G(a) = a$  o  $G(b) = b$ , la existencia del punto fijo es obvia. Pero suponga que no lo

156 es, entonces debe de cumplirse que  $G(a) > a$  y  $G(b) < b$ . Definamos  $h(x) = G(x) - x$ ,

157  $h(x)$  continua en  $[a, b]$  y  $h(a) = G(a) - a > 0$ ,  $h(b) = G(b) - b < 0$  y utilizando el



158 teorema del valor intermedio implica que existe un  $p \in (a, b)$  tal que  $h(p) = 0$ , por lo  
 159 tanto  $G(p) - p = 0$ , o  $G(p) = p$  y  $p$  es un punto fijo de  $G$ .

160

161 Teorema 2.

162 Sea  $G(x)$  una función continua con derivada continua el metodo converge si:

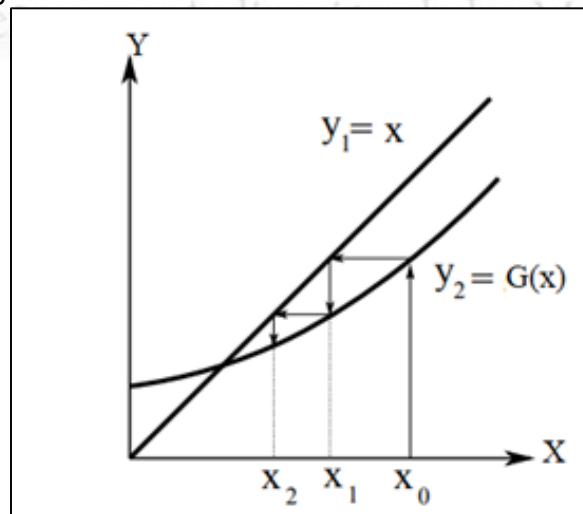
163 **Ecuación 23.**  $|G'(x_0)| < 1$  para  $x \in \mathbb{R}$

164 Esta es una condición necesaria pero no suficiente, en la ecuación (9) no es continua  
 165 tampoco su derivada. Si se toma  $x_0 = 1$  el método calcula una raíz.

166 Realizando un análisis de la ecuación 23. Si  $0 < G'(x) < 1$  tiene una convergencia  
 167 monótona, y si  $1 < G'(x) < 0$  es convergencia oscilatoria para una  $x \in \mathbb{R}$ , de lo  
 168 contrario, en su deducción por Rodríguez Calderón, W., & Pallares el método diverge,  
 169 Muñoz, M. R. (2015).

170 Si  $p$  es un punto fijo este cumple que  $f(p) = 0$ .

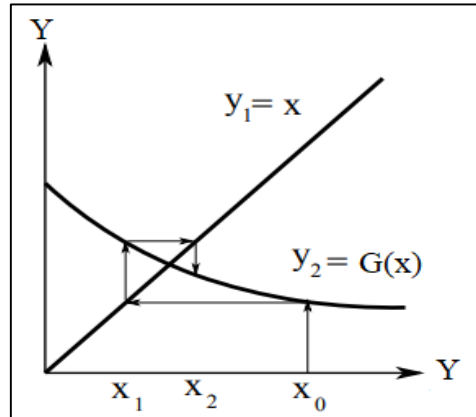
171 A continuación, se presentan diversas gráficas, que muestran algunas formas de  
 172 convergencia o divergencia:



173

174

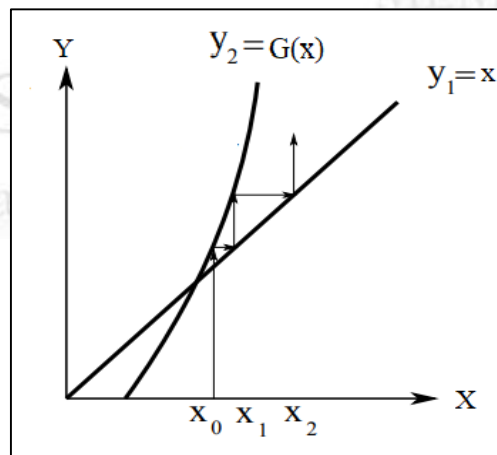
**Figura 5. Convergencia para  $0 < G'(x) < 1$  (comportamiento monótono)**



175

176

Figura 6. Convergencia para  $-1 < G'(x) < 0$  (comportamiento oscilatorio).



177

178

Figura 7. Divergencia para  $G'(x) > 1$  (comportamiento monótono)

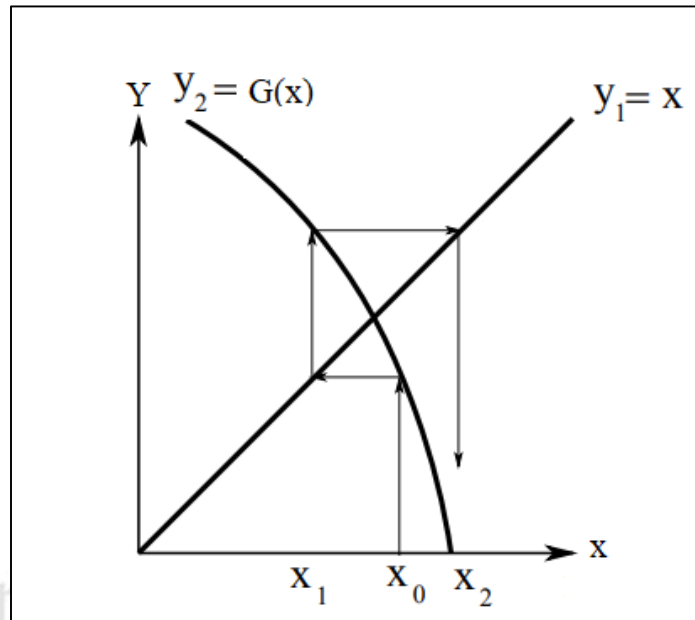


Figura 8. Divergencia para  $G'(x) < -1$  (comportamiento oscilatorio)

179  
 180  
 181  
 182  
 183  
 184  
 185  
 186  
 187  
 188  
 189  
 190

Aplicación 1.

Utilizando la ecuación 19, y escribiéndola en su forma iterativa,  $x_{n+1} = \frac{(x_n + \frac{2}{x_n})}{2}$  y con un error o tolerancia de  $e = 0.001$ ,  $x_0 = 1$ , se obtienen los siguientes resultados, en la tabla 9:

Valor de $x_0$ : 1	
Error o tolerancia: 0.001	
Número de iteración y aproximación a la raíz: 1	1.500000
Número de iteración y aproximación a la raíz: 2	1.416667
Número de iteración y aproximación a la raíz: 3	1.414216
Número de iteración y aproximación a la raíz: 4	1.414214

Tabla 9.

191  
 192  
 193  
 194

Ahora para la ecuación 17, en forma iterativa  $x_{n+1} = \frac{2}{x_n}$  y se obtiene los resultados en la tabla 10:

Valor de $x_0$ : 1	
Error o tolerancia: 0.001	
Número de iteración y aproximación a la raíz: 1	0.30873
Número de iteración y aproximación a la raíz: 2	0.30874
Número de iteración y aproximación a la raíz: 3	0.30875

Número de iteración y aproximación a la raíz: 4	0.30876
Número de iteración y aproximación a la raíz: 5	0.30877
Número de iteración y aproximación a la raíz: 6	0.30878
Número de iteración y aproximación a la raíz: 7	0.30879
Número de iteración y aproximación a la raíz: 8	0.30880
Número de iteración y aproximación a la raíz: 9	0.30881

**Tabla 10.**

195

196

197 Aplicación 2.

198

199 Considere la ecuación no lineal  $x^3 = 2x + 1$ , tomando un valor inicial  $x_0 = 1.5$ , criterio  
 200 de paro  $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon = 0.05$

201 Dejando de lado derecho una  $x$  y escribiéndola en su forma iterativa:

202

203

**Ecuación 24.**  $x_{n+1} = \frac{x_n^3 - 1}{2}$

204

**Ecuación 25.**  $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 - 2}$

205

**Ecuación 26.**  $x_{n+1} = \sqrt{\frac{2x_n + 1}{x_n}}$

206

**Ecuación 27.**  $x_{n+1} = \sqrt{\frac{2x_n + 5}{2x_n + 4}}$   $x_n \neq -2$

207

208

209 Obteniéndose los siguientes resultados mostrados en las tablas 11, 12, 13 y 14:

210

valor de $x_0$ : 1.5	
Error o tolerancia: 0.05	
Número de iteración y aproximación a la raíz: 1	1.187500
Número de iteración y aproximación a la raíz: 2	0.337280
Número de iteración y aproximación a la raíz: 3	-0.480816
Número de iteración y aproximación a la raíz: 4	-0.555578
Número de iteración y aproximación a la raíz: 5	-0.585744

**Tabla 11. Utilizando Ecuación 24**

211

212

valor de $x_0$ : 1.5	
Error o tolerancia: 0.05	
Número de iteración y aproximación a la raíz: 1	4.000000
Número de iteración y aproximación a la raíz: 2	0.071429
Número de iteración y aproximación a la raíz: 3	-0.501279
Número de iteración y aproximación a la raíz: 4	-0.571847
Número de iteración y aproximación a la raíz: 5	-0.597732

**Tabla 12. Utilizando Ecuación 25**

213

214

valor de $x_0$ : 1.5
----------------------

Error o tolerancia: 0.05	
Número de iteración y aproximación a la raíz: 1	1.632993
Número de iteración y aproximación a la raíz: 2	1.616284

Tabla 13. Utilizando Ecuación 26

215  
216

valor de $x_0$ : 1.5	
Error o tolerancia: 0.05	
Número de iteración y aproximación a la raíz: 1	1.069045
Número de iteración y aproximación a la raíz: 2	1.078386

Tabla 14. Utilizando Ecuación 27

217

### 218 3. Resultados y análisis

219

220 El método converge rápidamente si se encuentra una  $G(x)$ , la cual no es necesario  
 221 que sea continua y su derivada continua, pero si se quiere asegurar la convergencia  
 222 se debe de utilizar que  $|G'(x)| < 1$ , donde la derivada de  $G$  sea continua. Esto es lo que  
 223 hace complicado el método, en la figura (7) se observa que se tomó un valor muy  
 224 cercano al punto fijo y este diverge, también puede entrar en un ciclo, así que teniendo  
 225 en consideración estas dos cuestiones, si el método se va alejando no converge, si se  
 226 mete en un ciclo tampoco converge.

227

228

### 229 4. Conclusiones

230

231 Con base en los resultados obtenidos en la aplicación 1, la ecuación (19) no cumple el  
 232 criterio de convergencia de que  $|G'(x)| < 1$  y esta no es continua ni su derivada y no  
 233 cumple que sea continua y converge, en cambió la ecuación (18) esta no es continua,  
 234 tampoco su derivada, pero al comenzar a realizar las operaciones entra en un ciclo,  
 235 de esta forma no converge. Así que la condición de convergencia es necesaria pero  
 236 no suficiente, para cumplir el objetivo.

237

238 Por lo que respecta a la aplicación 2, observamos que las dos primeras secuencias  
 239 consideradas divergen y la última converge. Así que el teorema a utilizar es una  
 240 condición necesaria pero no suficiente. Con estas aplicaciones se tiene una idea de lo  
 241 relativamente complicado que es la utilización de este método.

### 242 Agradecimientos

243

244 El primer autor agradece el apoyo al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología  
 245 (CONACYT) a la Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Estudios  
 246 Superiores Cuautitlán al Instituto Politécnico Nacional, TESE- TecNM y a la  
 247 Universidad Autónoma Metropolitana.

248

249

250 **5. Índice de referencias**

251

252 Revistas

- 253 • Chuck A. (2006), On the Order of Convergence of Iterative Methods, Numerical  
254 Software Engineering. *Utah Valley State College*. 41(3), 283 – 307,  
255 • Dinesh P.. (2018), *Some Common Fixed Point Theorems Satisfying Meir-Keeler*  
256 *Type Contractive Conditions*, Scientific Research Publishing Inc, Open Journal  
257 of Discrete Mathematics, , 8, 35-47.  
258 • Rodríguez W. & Pallares M. (2015). Formulations to overcome the divergence  
259 of iterative method of fixed-point in nonlinear equations solution. *Revista*  
260 *Tecnura*, 19(44), 191-199.

MEMORIAS DEL  
Congreso Internacional  
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

# DISEÑO Y EXTRACCIÓN DE MUESTRAS UTILIZANDO DIFERENTES TECNICAS DE MUESTREO CON SPSS

Lagunes Toledo Ana Maria<sup>1,\*</sup>, Córdoba Lobo Víctor Manuel<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Unidad Profesional de Ingeniería y Ciencias Sociales y  
Administrativas (UPIICSA) del IPN,  
Av. Té 950, Col. Granjas México, C.P. 08400, Del. Iztacalco, Ciudad de México.

IP-POSM006

## Resumen

En el congreso realizado en mayo del 2021 se presenta una ponencia que describe los trabajos de elaboración de la unidad temática I “Selección de información mediante muestreo estadístico” perteneciente a la unidad de aprendizaje Estadística Aplicada para un nuevo programa académico Ingeniería en Movilidad Urbana del Instituto Politécnico Nacional. Al ser un programa teórico-práctico, en dicho artículo se propone como futuras líneas de investigación el diseño de las prácticas, aplicando diferentes técnicas de muestreo realizadas con software estadístico. Dando continuidad a esta investigación, durante el semestre agosto-diciembre del 2021 el colegio de profesores de Estadística Aplicada de las Academias de Matemáticas de la UPIICSA inicia los trabajos para diseñar las prácticas que serán incluidas en la unidad I del programa de estudios.

Este artículo describe la metodología que los profesores llevan a cabo para la selección y desarrollo de las prácticas utilizando el asistente de muestreo del software SPSS

Como primer punto se incluye una revisión documental sobre ventajas y desventajas de la utilización de software estadístico, cuyas licencias se tienen disponibles para los estudiantes en las salas de computo del departamento de Ciencias Básicas.

A continuación, se realiza la propuesta de diseño de tres prácticas utilizando diferentes Técnicas de muestreo con problemas relacionados con el área de movilidad urbana y Transporte. Finalmente se realizan sesiones plenarias con los profesores que imparten la unidad de aprendizaje en la carrera de Ingeniería en Transporte para evaluar las propuestas de diseño, realizar las prácticas y hacer sugerencias de mejora. El artículo termina con conclusiones y sugiere futuras líneas de investigación de interés.

**Palabras clave:** Transporte, Movilidad, técnicas, muestreo, software estadístico, SPSS

## 1. Introducción

Un nuevo programa académico se ofrece en el Instituto Politécnico Nacional denominado Ingeniería en Movilidad Urbana que hoy, ya se imparte en la Unidad Profesional Interdisciplinaria en Energía y Movilidad (UPIEM). Es indiscutible que son muchos los problemas que sus profesionales egresados tendrán que resolver, relacionados con el transporte de personas y bienes en las principales ciudades de nuestro país, para lo cual sera necesario analizar comportamientos, patrones y tendencias a partir del conocimiento inmerso en los datos. Así es, el manejo de la información ocupará un lugar relevante en su actividad profesional. Este trabajo describe la segunda parte de la investigación para la elaboración del programa Teórico-Práctico de la unidad de aprendizaje de Estadística Aplicada, que incluye el diseño de las prácticas con software

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: a-lagunes@hotmail.com

46 estadístico para la unidad temática I denominada “Selección de información mediante  
47 muestreo estadístico”, *dicho trabajo se realiza durante los meses de septiembre a no-*  
48 *viembre del 2021 en las academias de Matemáticas de la UPIICSA.*

49 *Se decide utilizar como software estadístico base, el IBM SPSS Statistics 20 dado que*  
50 *existe disponibilidad de las licencias para los estudiantes en dos salas de cómputo,*  
51 *una en el edificio de Formación Básica y otra el edificio de Laboratorios Ligeros.*

52 En el tenor de las ideas anteriores, este trabajo tiene como objetivo describir paso a  
53 paso la metodología aplicada para la selección y elaboración de dos prácticas: Mues-  
54 treo Aleatorio Simple y Muestreo Aleatorio Estratificado realizando la selección de la  
55 muestra a través de un Plan de muestreo. El resto del documento discurre como sigue:  
56 primeramente, se realiza una revisión documental sobre ventajas y desventajas del  
57 uso del software seleccionado. A continuación se efectúa una descripción detallada  
58 de una excelente herramienta que es el Asistente de Muestreo del SPSS. Por último  
59 se presentan conclusiones y propuestas para futuras investigaciones sobre el tema.

60

## 61 2. Desarrollo

62

### 63 2.1 ¿Que es IBM SPSS Statistics?

64

65 En el sitio WEB de IBM lo definen como una potente plataforma de software estadís-  
66 tico, cuyos procedimientos avanzados son de gran ayuda para garantizar una toma de  
67 decisiones confiable y precisa.

68 Sus siglas provienen del inglés Statistical Package for Social Sciences; sus trabajos  
69 iniciales se realizaron en la Universidad de Stanford

70

#### 71 2.1.1 Ventajas

72

- 73 ■ Ofrece una interfaz de usuario intuitiva y fácil de usar (Quezada, 2015)
- 74 ■ Ejecuta una gran cantidad de análisis desde estadística descriptiva, regresio-  
75 nes, hasta árboles de decisión etc
- 76 ■ Es integrado con código abierto
- 77 ■ Reduce significativamente el tiempo de análisis para el investigador
- 78 ■ Contiene procedimientos de minería de datos como aquellos relativos a las fa-  
79 ses de selección y transformación de datos, de igual forma procedimientos re-  
80 lativos a las fase de exploracion, limpieza, analisis descriptivo y predictivo de  
81 datos (Pérez, 2016)

#### 81 2.1.2 Desventajas

82

83 Marcelo Santana en su Blog. “Origen del IBM SPSS” menciona algunas desventajas  
84 como son:

84

- 85 ■ Requiere que la institución educativa disponga de licencias en sus salas de  
86 cómputo.
- 87 ■ El usuario debe tener experiencia en el uso del SPSS, además debe tener co-  
88 nocimientos de Estadística robustos y actualizados para que pueda comprender  
89 perfectamente que opciones utilizar, así como hacer una interpretación correcta  
de los resultados



- 90     ▪ Para el autor, los reportes de resultados contiene un nivel excesivo de informa-  
91     ción  
92

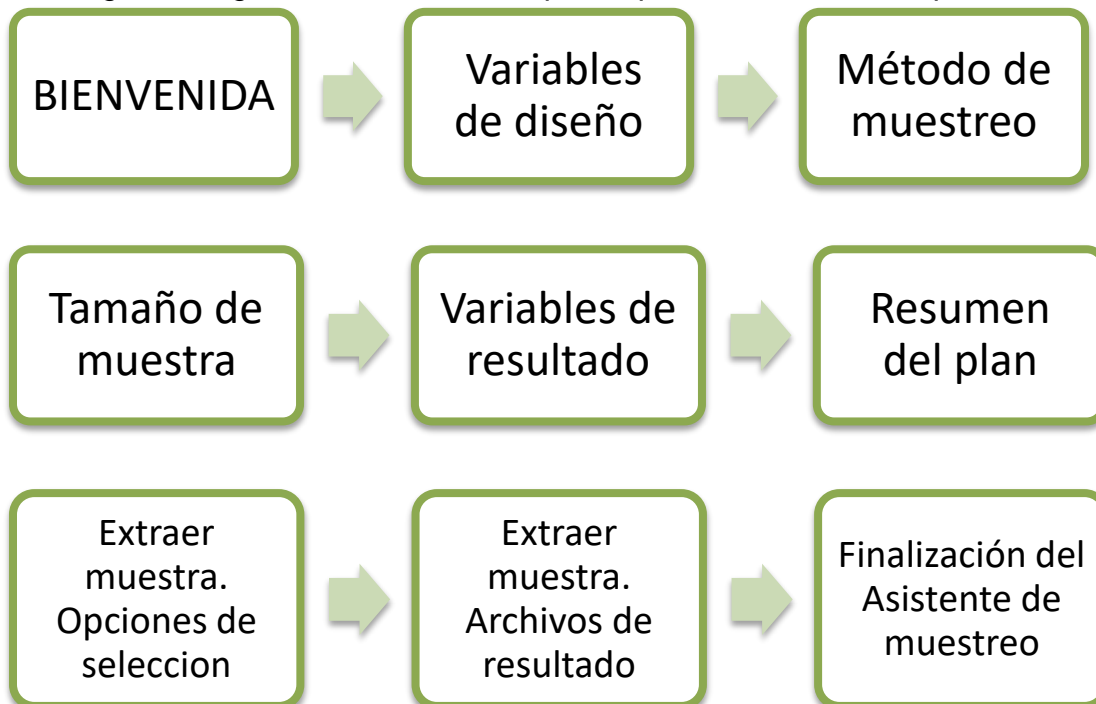
## 93   **2.2 Asistente de muestreo**

94  
95   Es una herramienta de SPSS que actúa como guía de pasos secuenciados para crear,  
96   modificar o ejecutar un archivo de plan de muestreo. Está dirigida a usuarios principal-  
97   mente encuestadores, quienes dependiendo de sus necesidades, requieran el uso de  
98   procedimientos de Muestras complejas. Es importante recalcar, que antes de utilizar  
99   esta herramienta el usuario debe tener perfectamente bien definida la población obje-  
100   tivo, enlistadas sus unidades muestrales, así como tener un adecuado diseño mues-  
101   tral.

102   En el documento “Muestreo a partir de un diseño complejo” publicado en la red por  
103   IBM, enuncian que una muestra compleja puede tener una o todas las características  
104   enunciadas a continuación:

- 105   - Estratificación
- 106   - Clústeres
- 107   - Múltiples etapas
- 108   - Muestreo no aleatorio
- 109   - Probabilidades de selección desiguales
- 110   - Muestreo no restringido
- 111   - Ponderaciones muestrales

112  
113   En la siguiente figura se describen los pasos para crear un nuevo plan de muestreo:



114  
115  
116  
117  
118   **Figura 1 Pasos para crear un plan de muestreo utilizando el Asistente de muestreo de SPSS**  
119

120 Esta secuencia de pasos ofrece varias ventajas: nos permite especificar como selec-  
 121 cionar los casos de un conjunto de datos activos, se pueden utilizar diferentes técnicas  
 122 de muestreo desde el aleatorio simple, sistemático, secuencial etc, proporciona un re-  
 123 sumen de las especificaciones del diseño muestral en cada etapa y además nos per-  
 124 mite controlar otras opciones del muestreo, como la semilla aleatoria y el tratamiento  
 125 de los valores perdidos, entre otras muchas.

126

### 127 3. Resultados y análisis

128

#### PRÁCTICA 1.

129

Muestreo Aleatorio Simple. Selección de una muestra a través de un Plan de muestreo.

130

131

**Tabla 1. Procedimiento para crear el plan de muestreo Práctica 1**

Objetivo	Obtener una muestra aleatoria de tamaño $n=15$ y calcular sus Estadísticos descriptivos
Base de datos	Se utiliza una base de datos de 1000 operadores de trailers
Variables de diseño	Operadores. Gasto mensual en dólares.
Metodo de muestreo	Seleccionar Muestreo Aleatorio simple. Sin sustitución.
Tamaño de muestra	Seleccionar en unidades “Recuentos” y en valor 15.
Variables de resultado	Seleccionar las variables que se desea guardar. Seleccionar las cuatro.
Resumen del plan	Seleccionar “No, no deseo añadir otra etapa”.
Extraer muestra. Opciones de selección	Confirmar que sí se desea extraer una muestra y seleccionar en el tipo de valor semilla “un número seleccionado de forma aleatoria.
Extraer muestra. Archivos de resultado	Seleccionar Nuevo conjunto de datos y dar nombre al archivo.
Finalización	Seleccionar Guardar el diseño en un archivo de plan y extraer la muestra.

132

133

Al finalizar aparece en el Visor de resultados la Tabla resumen

**Resumen**

		Etapa 1
Información de muestra	Método de selección	Muestreo aleatorio simple sin sustitución.
	Número de unidades muestreadas	15
Variables creadas o modificadas	Probabilidad de inclusión (selección) por etapas	InclusionProbabilit y_1_
	Ponderación muestral acumulada por etapas	SampleWeightCumulative_1_
Información de análisis	Supuesto de estimador	Muestreo de probabilidad igual sin sustitución
	Probabilidad de inclusión	Obtenido de la variable InclusionProbabilit y_1_

Archivo de plan: C:\Users\Lenovo\Desktop\Plan de muestreo aleatorio simple.csplan  
 variable de ponderación: SampleWeight\_Final\_

134

135

**Figura 2. Resumen obtenido en visor de resultado. IBM SPSS 20**

➔ **Muestras complejas: selección**

**Resumen para la etapa 1**

Número de unidades muestreadas		Proporción de unidades muestreadas	
Solicitado	Real	Solicitado	Real
15	15	1,5%	1,5%

Archivo de plan: C:\Users\Lenovo\Desktop\Plan de muestreo aleatorio simple.csplan

136  
137  
138  
139

**Figura 3. Resumen para la etapa 1 obtenido en en visor de resultado IBM SPSS 20**

La muestra obtenida n= 15 aparece en un nuevo conjunto de datos

	OPERADORES	Gasto	InclusionProbability_1_	SampleWeightCumulative_1_	SampleWeight_Final_
1	122	13,4000	,02	66,67	66,67
2	152	35,0000	,02	66,67	66,67
3	207	43,0000	,02	66,67	66,67
4	217	36,1000	,02	66,67	66,67
5	335	14,7000	,02	66,67	66,67
6	417	12,7000	,02	66,67	66,67
7	477	43,0000	,02	66,67	66,67
8	536	15,5000	,02	66,67	66,67
9	621	25,8000	,02	66,67	66,67
10	660	12,8000	,02	66,67	66,67
11	681	23,3000	,02	66,67	66,67
12	850	23,5000	,02	66,67	66,67
13	939	23,5000	,02	66,67	66,67
14	951	18,9000	,02	66,67	66,67
15	966	22,2000	,02	66,67	66,67

140  
141  
142  
143  
144

**Figura 4. Conjunto de datos con la muestra obtenida con IBM SPSS 20**

Los Estadísticos descriptivos obtenidos de la muestra aparecen en el visor de resultados.

➔ **Descriptivos**

[muestra\_aleatoriaANA]

	Estadísticos descriptivos									
	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. tip.	Varianza	Asimetría		Curtosis	
	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Error típico	Estadístico	Error típico
Gasto Gasto en dolares	15	1,3000	43,0000	22,646667	11,3230401	128,211	,103	,580	-,531	1,121
N válido (según lista)	15									

145  
146  
147  
148  
149  
150  
151

**Figura 5. Estadísticos descriptivos obtenidos en el visor de resultados. IBM SPSS 20**

**PRÁCTICA 2.**

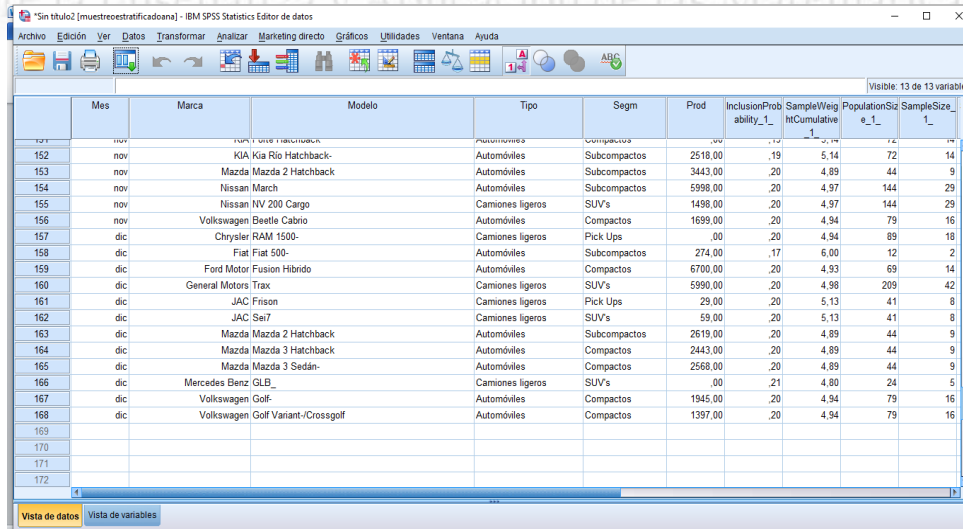
Muestreo Aleatorio Estratificado. Selección con plan de muestreo.

**Tabla 2. Procedimiento para crear el plan de muestreo Práctica 2**

Objetivo	Obtener una muestra estratificada de tamaño n y calcular sus estadísticos descriptivos
Base de datos	Base de datos del INEGI sobre producción de automóviles en México. N= 841

Variables de diseño	Mes de producción, Marca del fabricante, modelo, tipo, Segm (de acuerdo a la utilidad) y Prod (cantidad de vehículos producidos) Estratificar por Marca de fabricante
Método de muestreo	Muestreo aleatorio simple: Sin reposición dentro de cada estrato
Tamaño de muestra	Elegir Proporciones y se ordena tomar el 20% del número de unidades de cada estrato
Variables de resultado	Seleccionar las variables que se desea guardar. Seleccionar las cuatro
Resumen del plan	Seleccionar “No, no deseo añadir otra etapa”
Extraer muestra. Opciones de selección	Confirmar que sí se desea extraer una muestra y seleccionar en el tipo de valor semilla “un número seleccionado de forma aleatoria
Extraer muestra. Archivos de resultado	Seleccionar Nuevo conjunto de datos y dar nombre al archivo
Finalización	Seleccionar Guardar el diseño en un archivo de plan y extraer la muestra

152 Se obtiene una muestra de tamaño  $n=168$



	Mes	Marca	Modelo	Tipo	Segm	Prod	InclusionProbability_1	SampleWeightCumulative_1	PopulationSize_e_1	SampleSize_1
151	nov	KIA	Kia Rio Hatchback	Automóviles	Subcompactos	2518,00	,19	5,14	72	14
152	nov	KIA	Kia Rio Hatchback	Automóviles	Subcompactos	2518,00	,19	5,14	72	14
153	nov	Mazda	Mazda 2 Hatchback	Automóviles	Subcompactos	3443,00	,20	4,89	44	9
154	nov	Nissan	Nissan March	Automóviles	Subcompactos	5998,00	,20	4,97	144	29
155	nov	Nissan	Nissan NV 200 Cargo	Camiones ligeros	SUVs	1498,00	,20	4,97	144	29
156	nov	Volkswagen	Beetle Cabrio	Automóviles	Compactos	1699,00	,20	4,94	79	16
157	dic	Chrysler	RAM 1500-	Camiones ligeros	Pick Ups	,00	,20	4,94	89	18
158	dic	Fiat	Fiat 500-	Automóviles	Subcompactos	274,00	,17	6,00	12	2
159	dic	Ford Motor	Fusion Híbrido	Automóviles	Compactos	6700,00	,20	4,93	69	14
160	dic	General Motors	Trax	Camiones ligeros	SUVs	5990,00	,20	4,98	209	42
161	dic	JAC	Frison	Camiones ligeros	Pick Ups	29,00	,20	5,13	41	8
162	dic	JAC	Sai7	Camiones ligeros	SUVs	59,00	,20	5,13	41	8
163	dic	Mazda	Mazda 2 Hatchback	Automóviles	Subcompactos	2619,00	,20	4,89	44	9
164	dic	Mazda	Mazda 3 Hatchback	Automóviles	Compactos	2443,00	,20	4,89	44	9
165	dic	Mazda	Mazda 3 Sedán-	Automóviles	Compactos	2568,00	,20	4,89	44	9
166	dic	Mercedes Benz	GLB	Camiones ligeros	SUVs	,00	,21	4,80	24	5
167	dic	Volkswagen	Golf	Automóviles	Compactos	1945,00	,20	4,94	79	16
168	dic	Volkswagen	Golf Variant-/Crossgolf	Automóviles	Compactos	1397,00	,20	4,94	79	16

Figura 6. Conjunto de datos con la muestra obtenida con IBM SPSS 20

153  
154  
155  
156  
157  
158

En el visor de resultados aparece el resumen en donde se describen el número de unidades muestreadas en cada estrato. Se observa que la muestra tiene elementos de todos los estratos (13 marcas).

**Muestras complejas: Selección**

[?Conjunto\_de\_datos] C:\Users\Ana\Searches\Documents\ESTADISTICA J

**Resumen para la etapa 1**

	Número de unidades muestreadas		Proporción de unidades muestreadas	
	Solicitados	Reales	Solicitados	Reales
Marca = 21	2	2	20,0%	16,7%
22	18	18	20,0%	20,2%
23	2	2	20,0%	16,7%
24	14	14	20,0%	20,3%
25	42	42	20,0%	20,1%
26	4	4	20,0%	18,2%
27	8	8	20,0%	19,5%
28	14	14	20,0%	19,4%
29	9	9	20,0%	20,5%
30	5	5	20,0%	20,8%
31	29	29	20,0%	20,1%
32	5	5	20,0%	20,8%
33	16	16	20,0%	20,3%

Archivo del plan: C:\Users\Ana\Searches\Documents\Plan de Muestreo Estratificado ANA.csplan

159  
160  
161  
162  
163

**Figura 7. Resumen para la etapa 1 obtenido en en visor de resultado IBM SPSS 20**

Se calculan los estadísticos descriptivos de la muestra obtenida para la variable Prod (cantidad de vehículos producidos)

**Descriptivos**

[muestreoestratificadoana]

**Estadísticos descriptivos**

	N	Mínimo	Máximo	Media	Dev. tip.	Varianza	Asimetría		Curtosis	
	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Estadístico	Error típico	Estadístico	Error típico
Prod cantidad de vehículos producidos	168	,00	25238,00	4687,1964	6246,35284	39016923,78	1,557	,187	1,649	,373
N válido (según lista)	168									

164  
165  
166

**Figura 8. Estadísticos descriptivos obtenidos en el visor de resultados. IBM SPSS 20**

**4. Conclusiones**

167  
168  
169  
170  
171  
172  
173  
174  
175  
176  
177  
178  
179  
180  
181  
182  
183  
184  
185  
186

El asistente de muestreo es una excelente herramienta para realizar diseño y extracción de muestras, al utilizarlo el estudiante puede entender de una manera sencilla y ordenada el proceso, obtener la muestra para finalmente calcular las estimaciones que requiera para la toma de decisiones.

Las prácticas presentadas en este trabajo son ejemplos de muestreos en una sola etapa, se puede observar que en el muestreo aleatorio simple y en el muestreo estratificado las unidades de muestreo son las mismas que las unidades objeto de estudio, se trabaja con unidades elementales.

Se considera muy oportuno, el hecho de que el asistente de muestreo permita al usuario elegir el tipo de valor de semilla que desea utilizar entre dos opciones: un número seleccionado de forma aleatoria o entre un valor de semilla personalizado, si lo que desea es reproducir la muestra mas adelante.

Existen limitaciones de la investigación por lo que se sugiere considerar con precaución las conclusiones obtenidas en ella. Futuras líneas de investigación pueden estar enfocadas en diseñar una práctica de un Muestreo Multietápico, se propone un muestreo en dos etapas

187

188 **Agradecimientos**

189

190 El primer autor agradece el apoyo al colegio de profesores de la Academia de Esta-  
191 dística Aplicada de la UPIICSA por sus valiosas aportaciones y sugerencias a este  
192 trabajo. Así mismo, los autores agradecemos al Instituto Politécnico Nacional por la  
193 Beca EDD y COFAA otorgada a sus profesores-investigadores de la UPIICSA

194

195

196 **5. Índice de referencias**

197

198 Libros

199

200 • Perez, M (2016) Minería de datos a través de ejemplos. México:Alfaomega.

201 • Quezada, N.(2015) Estadística con SPSS 22. Peru: Editorial Macro

202

203 Información en línea

204

205 • IBM. (2014). Propel research and analysis with a comprehensive statistical  
206 software solution. 22 de Enero del 2022, de IBM Sitio web:

207 <https://www.ibm.com/downloads/cas/ERYRD6G5>

208 • SANTANA, M (2019) Ventajas y Desventajas del Programa IBM SPSS. 22 de  
209 Enero del 2022, de blogspot Sitio web: [https://lamejorinformaciondes-](https://lamejorinformaciondespss.blogspot.com/2019/01/ventajas-y-desventajas-del-programa-ibm.html)  
210 [pss.blogspot.com/2019/01/ventajas-y-desventajas-del-programa-ibm.html](https://lamejorinformaciondespss.blogspot.com/2019/01/ventajas-y-desventajas-del-programa-ibm.html)

211 • IBM. (2016). IBM SPSS - Muestras complejas 28. 24 de Enero del 2022, de  
212 IBM Sitio web:

213 [https://www.ibm.com/docs/en/SSLVMB\\_28.0.0/pdf/es/IBM\\_SPSS\\_Com-](https://www.ibm.com/docs/en/SSLVMB_28.0.0/pdf/es/IBM_SPSS_Complex_Samples.pdf)  
214 [plex\\_Samples.pdf](https://www.ibm.com/docs/en/SSLVMB_28.0.0/pdf/es/IBM_SPSS_Complex_Samples.pdf)

215 • IBM. (2016). Muestreo a partir de un diseño complejo. 24 de Enero del 2022,  
216 de IBM Sitio web:

217 [https://www.ibm.com/docs/es/spss-statics/25.0.0?to-](https://www.ibm.com/docs/es/spss-statics/25.0.0?topic=SSLVMB_25.0.0/spss/complex_samples/idh_idd_samp_wiz_welcome.html)  
218 [pic=SSLVMB\\_25.0.0/spss/complex\\_samples/idh\\_idd\\_samp\\_wiz\\_wel-](https://www.ibm.com/docs/es/spss-statics/25.0.0?topic=SSLVMB_25.0.0/spss/complex_samples/idh_idd_samp_wiz_welcome.html)  
219 [come.html](https://www.ibm.com/docs/es/spss-statics/25.0.0?topic=SSLVMB_25.0.0/spss/complex_samples/idh_idd_samp_wiz_welcome.html)

220 • INEGI. Registro administrativo de la industria automotriz de vehículos ligeros.  
221 Recuperado de: [https://www.inegi.org.mx/datosprimarios/iavl/#Datos\\_abiertos](https://www.inegi.org.mx/datosprimarios/iavl/#Datos_abiertos)

## CÁLCULO DE TÉRMINOS PARA APROXIMAR EL POLINOMIO DE TAYLOR

Gutiérrez Armenta Esiquio Martín<sup>1,\*</sup>, Gutiérrez Villegas Marco Antonio<sup>2</sup>, Cruz Sandoval Alejandro<sup>3</sup>, Gutiérrez Villegas Israel Isaac<sup>4y6</sup>, y Flores Sánchez Daniel<sup>5</sup>.

<sup>1</sup>Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Instituto Politécnico Nacional Edificio 5, Unidad Profesional Adolfo López Mateos Zacatenco, Col. Lindavista, C.P. 07340, Ciudad de México, México.

<sup>2,3</sup>Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco Departamento de Sistemas, Área Sistemas Computacionales. Avenida San pablo No 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, Ciudad de México, México.

<sup>4</sup>Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, División de Ingeniería Computacionales, Av. Tecnológico S/N C.P. 55210 Col. Valle de Anáhuac, Ecatepec de Morelos, Estado de México.

<sup>5</sup>Universidad Autónoma Metropolitana. Unidad Azcapotzalco Departamento de Materiales, Área de Ciencia de Materiales. Avenida San pablo No 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, Ciudad de México, México.

<sup>6</sup>Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional, Av. Instituto Politécnico Nacional Edificio 9, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07738, Ciudad de México, México

AP-POSM008

### Resumen

Este artículo tiene la finalidad de proponer un valor de número de términos obtenidos computacionalmente y que al usar Taylor, está representada por una infinidad de términos, al utilizar cada vez más de estos el error de propagación y de redondeo, así como el tiempo de cómputo se incrementan, debido a este tipo de complicaciones en vez de acercarnos más al valor que se desea aproximar se alejara de este, así que se buscara un número aproximado de términos computacionalmente que aproximen a estos en un noventa y cinco por ciento al valor real, utilizando Frederick Winslow Taylor (1856-1915), donde se debe tener una función continua, también sea infinitamente derivable y además sea continua en un intervalo dado, esto para asegurar que se pueda encontrar un polinomio que aproxime a la función, alrededor de un punto determinado.

En su trabajo Trevor I. Smith. (2016), la utiliza para una mejor comprensión para los estudiantes de expansiones de la serie de Taylor en mecánica, estadística, pero su alcance va más allá, ya que es muy útil en el cálculo numérico, física, y en otras disciplinas. Este tiene una propiedad que en un radio de convergencia su aproximación es buena, mientras que al evaluar  $x$  debe de estar cercano del radio de convergencia. Se calcularon el seno y coseno de los ángulos obtenidos en trigonometría utilizando el triángulo-rectángulo para 0, 30, 45, 60 y 90 grados respectivamente.

**Palabras clave:** Taylor, funciones continuas y triángulo-rectángulo.

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: esiqv11@hotmail.com Tel. 55 1339-1343

## 44 1. Introducción

45

46 Uno de los problemas para obtener un polinomio que se aproxime a una función  
47 depende que sea infinitamente derivable y por lo general es utilizado el desarrollo de  
48 Taylor. Su desarrollo es importante en las matemáticas para la aplicación de los  
49 métodos numéricos en los cuales son utilizados para resolver diversos problemas de  
50 las ciencias exactas en los cuales no se puede encontrar una solución analítica por  
51 medios convencionales. Y no es solo en las matemáticas o física, estos se pueden  
52 encontrar en economía, ciencias biológicas, medicina, ciencias sociales y  
53 administración entre otras, este método matemático tiene un gran campo de utilidad.  
54 En un trabajo realizado por Malik Saad Al-Muhja, (2019), teoría de la aproximación,  
55 junto con el teorema generalizado de la aproximación de Karl Weierstrass, en el que  
56 indica que cualquier función analítica se puede expresar como una sumatoria en series  
57 de potencias. Cabe mencionar que Marshall H. Stone generalizó considerablemente  
58 el teorema (Stone 1937) y simplificó la demostración en (Stone\_1948). Su resultado se  
59 conoce como el teorema de Stone-Weierstrass. Un estudio sobre el teorema de  
60 aproximación de Weierstrass, Pérez Dilcia, (2008), donde dado  $f: [a, b] \rightarrow R$ , y un  
61 arbitrario  $\varepsilon > 0$  existe un polinomio algebraico de grado  $p$  tal que  $|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$   
62 para todo  $x \in [a, b]$ . Una generalización del Teorema de Karl Theodor Wilhelm  
63 Weierstrass, fue realizado por Bernstein donde se enuncia de la siguiente manera:  
64 Dado  $f: [0, 1] \rightarrow R$  continua en un intervalo compacto, de clase  $C_{[a, b]}^{\infty}$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  
65 un polinomio algebraico de grado  $n$ , dado por:  $p_n(x)$  tal que  $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ . Una  
66 demostración es realizada por Dunham Jackson, (2016). Otra demostración de este  
67 teorema se debe a Serge Bernstein en 1911, desarrollado por Matt Young (2006),  
68 donde define unos polinomios que llevan su nombre (polinomios de Bernstein), dados  
69 en la forma de:  $B_n(x, f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - k)^{n-k}$ , que convergen uniformemente de

70 la siguiente forma:  $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{donde } B_n \text{ es un operador lineal, el cual se} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

71 utiliza para demostrar el teorema de aproximación de Weierstrass-Stone, en el  
72 intervalo  $[0, 1]$  para generalizarlo a un intervalo  $[a, b]$  utilizando  $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$ ,  $x \in [a, b]$ ,  
73 trasladando el problema al realizar aproximación por medio de los polinomios de  
74 Bernstein. Y que se utiliza en la demostración del teorema, este dice que se puede  
75 encontrar el polinomio de interpolación, pero no da una metodología para pasar del  
76 caso discreto al continuo.

77

## 78 2. Metodología o desarrollo

79

80 Se desea proponer un número de términos obtenidos computacionalmente, para  
81 aproximar la serie seno y coseno, para ángulos comunes de  $30^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$ ,  $60^{\circ}$  y  $90^{\circ}$ ; en  
82 radianes sería  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ , y  $\frac{\pi}{2}$  los cuales son obtenidos utilizando el triángulo-rectángulo.



83 Los valores calculados es empleando el teorema de Pitágoras para una nueva  
 84 demostración de Salman Mahmud Al-Muhja,(2019), utilizando este para los triángulos-  
 85 rectángulos propuestos se tiene la siguiente tabla 1.

86 **Tabla1. Se muestran las relaciones utilizando estos triángulos.**

Función	$30^\circ = \pi/6$ rad	$45^\circ = \pi/4$ rad	$60^\circ = \pi/3$ rad	$60^\circ = \pi/3$ rad
Seno(x)	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	0
Coseno(x)	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	1

87

88 Debido a que la serie tiene una infinidad de términos, se espera que sean pocos para  
 89 alcanzar un aproximado mayor al 95% del valor real. Este teorema de existencia, indica  
 90 que bajo condiciones específicas que una función  $f$  y sus derivadas deben satisfacer  
 91 que en un determinado intervalo  $[a, b]$ ,  $f$  debe ser de clase  $C_{[a,b]}^{n+1}$ .

92 Sobre el intervalo  $[a, b]$  la existencia de una expresión de la forma  $f(x)$  siempre está  
 93 garantizada, Edgardo Locia-Espinoza, eat. (2020), como:

94 **Ec. (1)** 
$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)(b-a)}{1!} + \frac{f''(a)(b-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} + \frac{f^{(n)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

95 donde  $c \in (a, b)$ .

96 Cuando  $a = 0$  y realizando el cambio de variable de  $b = x$ , y si satisface las mismas  
 97 condiciones que la anterior. Entonces esta puede ser expresada como:

98 **Ec. (2)** 
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \frac{f^{(n)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

99 donde  $|c| < |x|$ .

100 La expresión anterior se llama desarrollo de McLaurin. Se le llama parte regular y al  
 101 último término resto de Lagrange, es decir:  $f(x) = P(x) + R(x)$ , donde  $P(x) =$  parte  
 102 regular y  $R(x) =$  resto de Lagrange. Debemos señalar que existen otras formas del  
 103 resto de la fórmula de Taylor.

104 En su trabajo histórico Lars-Erik Persson (2017), proporciona varias maneras de  
 105 calcular el resto de la serie de Taylor, así como las obtenidas por: Bernoulli, Taylor,  
 106 MacLaurin, Lagrange, Lacroix, Cauchy, Schl Omilch, Roche, Cox, Turquan, Bourget,  
 107 Koenig, Darboux, Amigues, Teixeira, Peano, Blumenthal, Wolfe y Gon Ternerros.

108 En otra representación de la serie de Taylor, dada una función  $f$  centrada en  $x_0$  viene  
 109 dada por la siguiente ecuación:

110 **Ec. (3)**  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

111 Para representar la función  $f$  como una suma de polinomios con un término extra, se  
112 obtiene la Ecuación 4:

113 **Ec. (4)**  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

114 Donde  $P_n(x)$  es el polinomio de Taylor de grado  $n$  dado por:

115 **Ec. (5)**  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

116 y el residuo o el resto  $R_n(x)$  de este desarrollo de Taylor se expresa en la ecuación  
117 6:

118 **Ec. (6)**  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

119 Que es el Residuo de Taylor.

120 Parece ser que Lagrange fue el primero en estudiar las condiciones para expandir la  
121 función en las series de Taylor. En 1797 en su teoría de funciones analíticas se obtuvo  
122 la siguiente fórmula de la ecuación 7.

123 **Ec. (7)**  $f(x + h) = f(x) + xf'(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n$

124 donde:

125 **Ec. (8)**  $R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h)$

126 Esto es válido cuando la ecuación 8, cumple que  $\theta \in [0,1]$  además  $R_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow$   
127  $\infty$ . Y describe el residuo del teorema de Taylor Sánchez C. (2021), como:

128 **Ec. (9)**  $T_{k-1}(f; a, x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$

129 Que es el polinomio de Taylor de grado  $(k - 1)$  de  $f$  en  $x = a$ . Y el residuo de orden  
130  $k$  expresado  $R_k(f; a, b)$  para algún  $\alpha_x$  entre  $a$  y  $x$ , es:

131 **Ec. (10)**  $R_k(f; a, b) = \frac{f^{(k)}(\alpha_x)(x-a)^k}{k!}$

132 Y que es la más utilizada en la literatura.

### 133 Aplicación práctica:

134 Para el caso de la serie de Taylor para el coseno(x) y seno(x) son obtenidas de  
135 people math (2017), ec. 11 y ec. 12:

136 **Ec. (11)**  $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  para  $x \in \mathbb{R}$

137 **Ec. (12)**  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  para  $x \in \mathbb{R}$

138 Es necesario mencionar que el valor de  $x$  se sugiere evaluar en radianes en las series.  
 139 A continuación, se presentan la tabla 2 y la tabla 3 comparativas para una  
 140 aproximación mayor al 95% de la función seno(x) y coseno(x) comparadas con los  
 141 valores reales utilizando en la tabla 1. Se realizaron los cálculos en precisión simple.

142 **Tabla 2. \*Va=Valor aproximado. \*\*Vref=Valor de referencia.**

Sen(x) grad-rad	Número de términos de Taylor (3) * Va	Valor de referencia **Vref	Tolerancia o error de aproximación
$30^\circ = \pi/6$	0.5000020	0.4999999	0.0004%
$45^\circ = \pi/4$	0.7071430	0.7071067	0.005%
$60^\circ = \pi/3$	0.8662952	0.8660253	0.03%
$90^\circ = \pi/2$	1.0045249	0.9999999	0.45%

143

144

145

**Tabla 3. \*Va=Valor aproximado. \*\*Vref=Valor de referencia**

Coseno(x) grad-rad	Número de términos de Taylor (3) * Va	Valor de referencia ** Vref	Tolerancia o error de aproximación
$30^\circ = \pi/6$	0.8660539	0.8660254	0.003%
$45^\circ = \pi/4$	0.70714293	0.7071068	0.045%
$60^\circ = \pi/3$	0.5017963	0.5000000	0.35%
$90^\circ = \pi/2$	0.0199691	0.0000000	1.99%

146

147

**Tabla 4. \*Va=Valor aproximado. \*\*Vref=Valor de referencia.**

Sen(x) grad-rad	Número de términos de Taylor (3) * Va	Valor de referencia **Vref	Tolerancia o error de aproximación
$30^\circ = \pi/6$	0.500002132588792	0.499999999999999	0.0004%
$45^\circ = \pi/4$	0.707143045779360	0.707106781186547	0.005%
$60^\circ = \pi/3$	0.866295283786834	0.866025403784438	0.03%
$90^\circ = \pi/2$	1.004524855534817	1.000000000000000	0.45%

148

149

Tabla 5. \*Va=Valor aproximado. \*\*Vref=Valor de referencia

Coseno(x) grad-rad	Número de términos de Taylor (3) * Va	Valor de referencia ** Vref	Tolerancia o error de aproximación
$30^\circ = \pi/6$	0.866053883415748	0.866025403784439	0.003%
$45^\circ = \pi/4$	0.707429206709773	0.707106781186547	0.045%
$60^\circ = \pi/3$	0.501796201500182	0.500000000000000	0.35%
$90^\circ = \pi/2$	0.019968957764879	0.000000000000000	1.99%

150

151

152

153

### 154 3. Resultados y análisis

155

156 De la tabla 2 y tabla 3 se observa que el cálculo efectuado en el ángulo de  $90^\circ$  es en  
 157 el que se comete más error con precisión sencilla, utilizando doble precisión es el  
 158 ángulo de  $60^\circ$  y  $90^\circ$  en donde se comete más error; pasando lo mismo con la serie  
 159 coseno en la tabla 4 y tabla 5. Con solo tres términos de Taylor se tiene una muy buena  
 160 aproximación con respecto al valor real o de referencia.

161

### 162 4. Conclusiones

163

164 Las series de Taylor son una excelente herramienta matemática para aproximar  
 165 funciones, que resultan difíciles de obtener por medio de manipulaciones algebraicas  
 166 convencionales. Dos funciones muy importantes en trigonometría y matemáticas  
 167 avanzadas, como son la función seno(x) y coseno(x), fueron calculadas con las series  
 168 de Taylor y con solo tres términos, se alcanzaron resultados muy cercanos a los  
 169 valores de referencia. En las tablas 2, 3, 4 y 5, se puede ver el error relativo porcentual

170 absoluto, que nos indica la aproximación bastante buena que se obtiene, utilizando  
171 para ello, algoritmos en lenguaje C y Matlab, como herramientas, para poder ver el  
172 costo computacional que implica tales cálculos cuando se tienen más términos de esta,  
173 ya que se incrementa el cálculo del factorial y la elevación a una potencia como la  
174 suma del número de estos. También hay que tener en cuenta los errores de redondeo  
175 y truncamiento de estas series, así como el error de propagación para poder utilizar la  
176 potencia de este cálculo de la serie. Es muy importante esta aplicación para toda  
177 persona que realiza estudios universitarios, y que comprenda la importancia de utilizar  
178 adecuadamente las series de Taylor.

## 179 **Agradecimientos**

180

181 El primer autor agradece el apoyo al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología  
182 (CONACYT) a la Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Estudios  
183 Superiores Cuautitlán al Instituto Politécnico Nacional, TESE- TecNM y a la  
184 Universidad Autónoma Metropolitana.

185

## 186 **5. Índice de referencias**

187

### 188 Revistas

- 189 • Trevor I. Smith, John R. Thompson and Donald B. Mountcastle (2012). Student  
190 Understanding of Taylor Series Expansions in Statistical Mechanics, arXiv:  
191 1112.4231v2 [physics.ed-ph], <https://arxiv.org/pdf/1112.4231.pdf>.
- 192 • Malik Saad Al-Muhja, Masnita Misiran , Zurni Omar.(2019), The development of  
193 approximation theory and some proposed applications, International Journal of  
194 Engineering & Technology, 8 (2)  
195 Website:[www.sciencepubco.com/index.php/IJET](http://www.sciencepubco.com/index.php/IJET), pp 90-94
- 196 • Pérez Dilcia, Quintana Yamilet. (2008), A survey on the Weierstrass  
197 approximation theorem, Divulgaciones Matemáticas Vol. 16 No. 1, pp. 231–247
- 198 • Matt Young. (2006), Stone Weierstrass Theorem MATH 328 Notes Queen's  
199 University at Kingston Winter Term,  
200 <https://mast.queensu.ca/~speicher/Section14.pdf>
- 201 • Dunham Jackson. (2016)., La teoría de la aproximación, (Publicaciones del  
202 Coloquio Americano de Matemáticas, Volumen XI.) Pp. viii + 178. Precio no  
203 indicado. 1930. (American Mathematical Society, Nueva York),  
204 [https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-gazette/article/abs/the-  
205 theory-of-approximation-by-dunham-jackson-american-mathematical-  
206 colloquium-publications-volume-xi-pp-viii-178-price-not-stated-1930-american-  
207 mathematical-society-new-york/4579331DBB1D61420786E5F9281B5E72](https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-gazette/article/abs/the-theory-of-approximation-by-dunham-jackson-american-mathematical-colloquium-publications-volume-xi-pp-viii-178-price-not-stated-1930-american-mathematical-society-new-york/4579331DBB1D61420786E5F9281B5E72)
- 208 • Salman Mahmud. (2019) A New Long Proof of the Pythagorean Theorem,  
209 International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research  
210 (IJSIMR) Volume 7, Issue 9, ,PP 3-7
- 211 • Edgardo Locia-Espinoza , Armando Morales-Carballo , Héctor Merino-Cruz.  
212 (2020). INTERNATIONAL ELECTRONIC JOURNAL OF MATHEMATICS

- 213 EDUCATION e-ISSN: 1306-3030, Vol. 15, No. 3, em0585  
214 <https://doi.org/10.29333/iejme/7852>  
215 • Lars-Erik Persson. (2017), Note di Matematica, Note Mat. 37 no. 1, 1-21, ISSN  
216 1123-2536, e-ISSN 1590-0932, doi:10.1285/i15900932v37n1p1  
217 • C. SÁNCHEZ,( 2021),HE RAFU REMAINDER IN TAYLOR'S FORMULA,  
218 Austral Internet Publishing, csanchezalicia@gmail.com.

MEMORIAS DEL  
Congreso Internacional  
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

## ALGEBRA LINEAL CON APRENDIZAJE INVERTIDO

Alcántara Rosales Rodolfo Guadalupe<sup>1,\*</sup>, Moreno Reyes Hugo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec. *Carretera Jilotepec Chapa de Mota Km. 6.5 Ejido de Jilotepec, Edo. Mex.*

<sup>2</sup>*Centro Interdisciplinario de Investigación en Docencia y Educación Técnica. Av. Universidad 282, Centro, Santiago de Querétaro, Qro.*

ID-POSM010

### Resumen

Ante la situación que se ha vivido por motivos de la emergencia sanitaria, la educación presencial ha tenido que utilizar metodologías que permitan atender a los alumnos. En el presente trabajo, se muestra la experiencia vivida al aplicar el aprendizaje invertido en la asignatura de Álgebra Lineal en el semestre 2021-2 a alumnos de dos grupos de tercer semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales en el Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec. El objetivo es determinar qué ventajas de aprendizaje se logran al hacer que los estudiantes sean más participativos y aportadores de ideas y conocimientos, aplicando sus competencias previas y las adquiridas a lo largo del curso para resolver problemas de naturaleza abstracta en la asignatura. En este semestre, la función del docente fue de facilitador y orientador en las unidades abordadas, dejando al alumno el trabajo de investigación para el desarrollo de algoritmos que sean utilizados para el desarrollo de software que represente los modelos matemáticos, utilizados en la solución de problemas de cada unidad de aprendizaje.

La experiencia didáctica vivida, mostró que el aprendizaje invertido es una excelente alternativa en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que los alumnos, con el apoyo de herramientas digitales y software de programación como Excel, octave y java, resolvieron diferentes problemas que implicaron temas en las unidades: 1. Números complejos, 2. Matrices, 3. Solución de ecuaciones lineales y 4. Transformaciones, realizando simulación, graficación y análisis matemático.

Los resultados obtenidos al aplicar el aprendizaje invertido fueron: 1. Mejor entendimiento de los temas al programar los métodos y modelos matemáticos en un software. 2. Creación de paquetes de aplicación con uso de software para uso en otras carreras de ingeniería. 3. Trabajo colaborativo con aportación de ideas para mejora en los procedimientos algorítmicos.

**Palabras clave:** Aprendizaje invertido, enseñanza, didáctica, herramientas digitales, software, programación.

### 1. Introducción

A inicios del año 2020, el mundo tuvo un cambio radical en sus actividades sociales, laborales y familiares debido al brote agudo de la pandemia COVID-19. La educación presencial en todos sus niveles se vio afectada por el cambio de las actividades en aula a las de casa, tanto para alumnos como docentes; adaptar el proceso de enseñanza y aprendizaje de programas y planes de estudio diseñados para llevarlos en forma presencial, obligó a su adaptación a una educación a distancia. Conforme pasaron los meses de confinamiento, se hicieron evidentes los problemas de conectividad y metodologías educativas que permitieran el desarrollo de actividades de aprendizaje que motivaran la participación del alumno y el desempeño adecuado del docente a la nueva modalidad de enseñanza.

<sup>1</sup>\* Autor para la correspondencia. E-mail: roaltep@gmail.com

46 Sin embargo, a pesar de las circunstancias, había que mantener el proceso de  
47 enseñanza y aprendizaje del siglo XXI, que de acuerdo con Paulo Freire (2007), debe  
48 fomentar en el alumno las competencias tales como: tolerancia, la comunicación, la  
49 innovación, la creatividad, el pensamiento crítico, la colaboración, el trabajo en equipo.  
50 La aplicación de nuevas prácticas educativas para aprovechar los tiempos y espacios  
51 de aprendizaje en la educación a distancia, que generen conocimiento y productos  
52 académicos. Para cumplir con estas competencias, la aplicación del aprendizaje  
53 invertido con un enfoque pedagógico que permite abordar contenidos desde y con  
54 ayuda de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). En otras  
55 palabras, aborda temas desde la virtualidad, lo que amplía los espacios y tiempos de  
56 aprendizaje, asimismo, se incorpora una nueva experiencia de aprendizaje, lo que le  
57 otorga a dicha estrategia una innovación.

58  
59 El objetivo de la presente experiencia en el aula es determinar qué ventajas de  
60 aprendizaje se logran en la asignatura de Álgebra Lineal, al implementar el aprendizaje  
61 invertido y hacer que los estudiantes sean más participativos y aportadores de ideas y  
62 conocimientos, aplicando sus competencias previas y las adquiridas a lo largo del  
63 curso para resolver problemas de naturaleza abstracta en la asignatura, considerando  
64 que el maestro tiene un nuevo papel, y es el de guía y facilitador del proceso de  
65 enseñanza y aprendizaje, porque se ocupa de atender de manera personalizada a los  
66 estudiantes, así como de generar actividades que les permitan a los alumnos promover  
67 y desarrollar habilidades del siglo XXI.

68  
69 Es importante considerar que los jóvenes que cursan esta asignatura tienen edad  
70 comprendida entre los 18 y 20 años, que de acuerdo con Arnett (2013) se consideran  
71 adultos emergentes, caracterizados por ser gente joven buscando su independencia  
72 de sus padres y explorar varias posibilidades en su vida. Por otro lado, por las  
73 características de su carrera en Ingeniería en Sistemas Computacionales, cuentan con  
74 equipo de cómputo portátil y teléfonos inteligentes (Smart phones), así como  
75 conocimientos de programación en lenguajes como *octave*, *java*, *Excel*, *visual studio*,  
76 entre otros.

77  
78 Finalmente, se debe aclarar que el término aula invertida no es sinónimo de  
79 aprendizaje invertido. El primero consiste en asignar a los estudiantes textos, videos o  
80 contenidos adicionales para revisar fuera de clase. El segundo es un enfoque  
81 pedagógico que transforma la dinámica de la instrucción (Arfstrom, 2014).

82

## 83 2. Desarrollo

84

### 85 2.1 Caracterización de la asignatura

86

87 La asignatura de Álgebra Lineal con clave ACF 0903 y créditos SATCA 3-2-5, del  
88 Tecnológico Nacional de México, se caracteriza por: aportar al perfil del ingeniero la  
89 capacidad para desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar  
90 fenómenos de naturaleza lineal y resolver problemas.



91

92 2.1.1 Intención didáctica

93

94 En el primer tema se estudian los números complejos como una extensión de los  
 95 números reales, tema ya abordado en Cálculo Diferencial. El tema dos, matrices y  
 96 determinantes, se propone previo al tema de sistemas de ecuaciones lineales con la  
 97 finalidad de darle mayor importancia a las aplicaciones de las matrices. El tercer tema,  
 98 sistemas de ecuaciones lineales, constituye una parte fundamental en esta asignatura  
 99 por lo que se hace énfasis en el modelaje, representación gráfica y solución de  
 100 problemas para las diferentes aplicaciones en ingeniería. En el cuarto tema se estudian  
 101 los espacios vectoriales. Se proponen estudiar aplicaciones como: componentes  
 102 simétricas, solución de modelos de estado, transformaciones de similitud,  
 103 procesamiento de imágenes, etc. El último tema, transformaciones lineales, se  
 104 presenta condensado haciendo énfasis en las aplicaciones y en la representación de  
 105 la transformación lineal como una matriz.

106

107 2.1.2 Competencias a desarrollar

108

109 Modelar procesos lineales en su entorno. Es importante que el estudiante valore las  
 110 actividades que realiza, que desarrolle hábitos de estudio y de trabajo para que  
 111 adquiera características tales como: la curiosidad, la puntualidad, el entusiasmo, el  
 112 interés, la tenacidad, la flexibilidad y la autonomía.

113

114 2.2. Plataformas utilizadas

115

116 Para apoyar el desarrollo de la clase, se utilizaron las plataformas de *classroom*, *meet*  
 117 y *YouTube*.

118

119

120

**Tabla 1. Ventajas de uso de classroom para profesores y alumnos.**

Tipo de usuario	Esto es lo que se puede hacer
Profesores	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Iniciar videollamadas.</li> <li>• Crear y gestionar clases, tareas y calificaciones online sin necesidad de usar papel.</li> <li>• Añadir materiales a las tareas, como vídeos de <i>YouTube</i>, encuestas de Formularios de Google y otros elementos de Google Drive.</li> <li>• Enviar comentarios directos y en tiempo real.</li> <li>• Utilizar el tablón para publicar anuncios y plantear preguntas para fomentar el diálogo entre los alumnos.</li> </ul>
Alumnos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mantenerse al tanto del trabajo de clase y entregar tareas.</li> <li>• Consultar informes de originalidad, comentarios y calificaciones.</li> </ul>

- Compartir recursos e interactuar en el tablón de anuncios o por correo electrónico.

121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
128

### 2.3 Componentes de enseñanza y aprendizaje utilizados

Se establecieron los objetivos claros de aprendizaje para cada uno de los temas, mostrándose en la siguiente tabla las actividades desarrolladas por los alumnos para su evaluación sumativa.

**Tabla 2. Actividades de enseñanza y aprendizaje. Fuente: Elaboración propia.**

ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE
<b>UNIDAD 1. Utilizar los números complejos, sus representaciones y las operaciones entre ellos.</b>	Realizar programa para realizar operaciones con números complejos, que permita capturas dos números y mostrar las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división.
<b>UNIDAD 2. Utiliza las matrices, sus propiedades, el determinante y operaciones entre ellas, para resolver problemas de aplicación en ingeniería.</b>	El alumno realizará un software que permita determinar el determinante de una matriz, construir una matriz inversa, matriz unidad y adjunta.
<b>UNIDAD 3. Resolver problemas de aplicación en ingeniería sobre sistemas de ecuaciones lineales para interpretar las soluciones y tomar decisiones con base en ellas.</b>	Elaborar un programa para la solución de ecuaciones lineales de $n \times m$ , considerando problemas reales, realizando amigable el programa para ser usado sin problemas por cualquier usuario. Se anexará manual de usuario.
<b>UNIDAD 4. Comprender la definición de espacio vectorial como una abstracción para relacionarlo con otras áreas de las matemáticas.</b>	Representar matricialmente un vector y mostrarlo gráficamente en un software.
<b>UNIDAD 5. Utilizar la definición de transformación lineal y sus propiedades para representarla matricialmente.</b>	Aplicando la transformación lineal, elaborar un reloj analógico en un programa de cómputo que lo muestre gráficamente y el movimiento de las manecillas que demuestren la transformación lineal

129

130 **3. Resultados y análisis**

131

132 Para evaluar el aprendizaje invertido, se aplicó el un cuestionario para evaluar el  
 133 método aplicado y ventajas desde la perspectiva de los alumnos, utilizando un  
 134 formulario de Google, aplicando escala Likert de 1 como valor mínimo y 5 como  
 135 máximo y en la última pregunta de la tercera sección el valor mínimo 1 y máximo 10.

136

137 **3.1 Uso de TIC**

138

139

**Tabla 3. Resultados de uso de TIC. Fuente: Elaboración propia.**

ITEM	1	2	3	4	5
<b>1. Facilita el trabajo en grupo</b>	0%	0%	5.9%	25.5%	68.6%
<b>2. Motiva el aprendizaje</b>	0%	2%	5.9%	33.3%	58.8%
<b>3. Facilitan el recuerdo de la información.</b>	0%	2%	7.8%	25.5%	64.7%
<b>4. Facilitan el auto aprendizaje</b>	0%	2%	9.8%	23.5%	64.7%
<b>5. Propician nuevas relaciones profesor-alumno</b>	0%	5.9%	7.8%	21.6%	64.7%
<b>6. Permiten el acceso a más información.</b>	2%	0%	2%	23.5%	72.5%
<b>7. Facilitan la transferencia de conocimientos.</b>	2%	0%	7.8%	33.3%	56.9%
<b>8. Ofrece una mayor presentación de contenidos.</b>	2%	2%	3.8%	33.3%	52.9%
<b>9. Crean o modifican actitudes.</b>	0%	2%	9.8%	33.3%	54.9%

140

141 **3.2 Desarrollo del curso**

142

143

**Tabla 4. Resultado de desarrollo del curso. Fuente: Elaboración propia.**

ITEM	1	2	3	4	5
<b>1. Se favoreció la participación.</b>	0%	2%	7.8%	25.5%	64.7%
<b>2. Prevaleció el trabajo individual</b>	0%	2%	17.6%	17.6%	62.7%
<b>3. Existió funcionalidad y aplicación de los temas.</b>	0%	2%	7.8%	15.7%	74.5%
<b>4. Favorecer la actividad.</b>	0%	2%	5.9%	27.5%	64.7%
<b>5. Se favoreció la interrelación personal.</b>	0%	2%	5.9%	35.3%	56.9%
<b>6. Se partió de conocimientos previos.</b>	0%	0%	7.6%	29.4%	62.7%
<b>7. Existió cooperación grupal.</b>	0%	5.9%	11.8%	21.6%	60.8%
<b>8. Se motivó el aprendizaje.</b>	0%	3.9%	2%	29.4%	64.7%

144 **3.3 Habilidades desarrolladas**

145  
146

**Tabla 5. Resultados de habilidades desarrolladas. Fuente: Elaboración propia.**

ITEM	1	2	3	4	5
1. Uso ideas e información que conozco para entender algo nuevo.	2%	0%	3.9%	31.4%	62.7%
2. Las actividades planteadas me hacen desarrollar otras destrezas	2%	0%	9.8%	25.5%	62.7%
3. Esta actividad ha cambiado mi visión sobre el papel del alumno.	2%	3.9%	7.8%	23.5%	62.7%
4. La asignatura ha cambiado mi actitud como alumno.	2%	2%	3.9%	33.3%	58.8%
5. Los alumnos hemos asumido responsabilidades en el proceso de aprendizaje.	3.9%	0%	5.9%	19.6%	70.6%
6. Las actividades planteadas me hacen desarrollar otras destrezas instrumentales.	2%	0%	9.8%	33.3%	54.9%
7. La modalidad no presencial me motiva a trabajar más	7.8%	7.8%	13.7%	19.6%	51%

en mi aprendizaje.										
<b>8. La mayoría de las cosas que he aprendido de esta asignatura ha sido sin ayuda del profesor.</b>	<b>5.9%</b>	<b>5.9%</b>	<b>21.6%</b>	<b>27.5%</b>	<b>39.2%</b>					
<b>9. Consigo más asistiendo a clases que dedicando ese tiempo de estudio en casa.</b>	<b>3.9%</b>	<b>5.8%</b>	<b>9.8%</b>	<b>33.3%</b>	<b>47.1%</b>					
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>10. Confío en mis propias habilidades para aprender material importante.</b>	<b>0 %</b>	<b>0 %</b>	<b>2 %</b>	<b>2 %</b>	<b>3.9 %</b>	<b>3.9 %</b>	<b>7.8 %</b>	<b>25.5 %</b>	<b>5.9 %</b>	<b>51 %</b>

147

#### 148 4. Conclusiones

149

150 De acuerdo a los resultados obtenidos, el uso de las TIC es una herramienta  
 151 importante para el aprendizaje invertido, ya que facilitan y motivan el aprendizaje, el  
 152 autoaprendizaje, tener la información disponible sea por parte del profesor o consulta  
 153 en Internet, así como facilitar la relación entre profesor y alumnos; la transparencia y  
 154 transmisión de conocimientos, la presentación de contenidos y actitudes hacia la  
 155 participación activa en clase, son las ventajas que se resultaron de esta metodología  
 156 de enseñanza y aprendizaje.

157

158 En cuanto al desarrollo del curso, se mejoró la participación individual y por equipo con  
 159 mayor actividad e interrelación personal. Fue posible incentivar la aplicación de  
 160 conocimientos y competencias previas, como las de programación en la solución de  
 161 problemas de ingeniería basados en algebra lineal. En las habilidades desarrolladas,  
 162 el estudiante ubica una nueva realidad en cuanto al modelo educativo centrado en el  
 163 estudiante, ratificándose la importancia de su participación en clase investigando y  
 164 aportando nuevo conocimiento. Aunque es pertinente aclarar que tomar clases en casa  
 165 no sea óptimo por las distracciones propias que se tienen en familia y la necesidad de  
 166 un lugar apropiado libre de distracciones. Considerando el regreso presencial  
 167 escalonado, el aprendizaje invertido es una opción para atender a los grupos bajo la

168 implementación de un modelo híbrido, donde la relación profesor y alumnos tendrá una  
169 nueva dinámica, con un aprendizaje centrado en el alumno y el docente como guía y  
170 facilitador del conocimiento, todo apoyado con el uso de TIC y herramientas digitales.

171

## 172 **Agradecimientos**

173

174 Los autores agradecemos el apoyo de nuestras instituciones por el convenio de  
175 colaboración conjunto para realizar actividades de Investigación Educativa. Así mismo,  
176 agradecemos la invaluable participación de los alumnos de la carrera de Ingeniería en  
177 Sistemas Computacionales de los grupos 3301 y 3302 del tercer semestre.  
178 ¡Felicitaciones!

179

## 180 **5. Índice de referencias**

181 • Arnett, J. J. (2013). Adolescence and emerging adulthood: a cultural approach  
182 (5th ed). Boston: Pearson.

183 • Freire, P. (2009). La educación como práctica de la libertad. México: SXXI  
184 Editores.

185 • Arfstrom, K. (2014).

186 EdTech.[http://www.edtechmagazine.com/k12/article/2014/07/whats-difference-](http://www.edtechmagazine.com/k12/article/2014/07/whats-difference-between-flippedclassroom-and-flipped-learning)  
187 [between-flippedclassroom-and-flipped-learning](http://www.edtechmagazine.com/k12/article/2014/07/whats-difference-between-flippedclassroom-and-flipped-learning)

188 • Modelo\_Educativo/Modelo\_Educacion\_Distancia\_TecNM.pdf  
189 <https://tapachula.tecnm.mx/>

190

# CÁLCULO Y SELECCIÓN DE AEROGENERADOR EN EDIFICIO FARMACÉUTICO EN LA CD. MX.

Castillo Sánchez Martín Dario<sup>\*1</sup> Velázquez Vázquez María de Jesús, Rivas Martínez Juan Daniel  
Instituto Politécnico Nacional, ESIME Zacatenco. Unidad Profesional “Adolfo López Mateos”, Col. Lindavista, C.P. 07738, Alcaldía Gustavo A. Madero, CDMX. Edif. 2. C.2101

AP- POSM011

## Resumen

En el presente trabajo a través del uso de una serie de ecuaciones matemáticas, se diseñó, calculó y realizó la propuesta para la instalación de aerogeneradores con un banco de baterías, para suministro de energía eléctrica que alimenta las luminarias de 3 pisos del edificio de una compañía farmacéutica. Se enfoca en el consumo de energía debido que la alta demanda de energía eléctrica la ubica en una tarifa GDMTH (Gran demanda en media tensión horaria.), lo cual genera gastos elevados para la empresa, sin mencionar que la zona sufre de cortes intermitentes que ponen en riesgo los procesos que efectúa dicha farmacéutica. A través de la aplicación de ecuaciones matemáticas se logró el dimensionamiento para la selección de los aerogeneradores con su banco de baterías, y los inversores correspondientes para el suministro de la carga requerida para las luminarias de 3 pisos de producción en el edificio, así como también las ecuaciones matemáticas nos permiten hacer los cálculos correspondientes para obtener la correcta selección del tipo de equipos periféricos, los conductores y protecciones correspondientes de acuerdo con la NOM-001-SEDE-2012.

**Palabras clave:** Eólico, renovable, aerogeneración, factibilidad, interconexión

## 1. Introducción

Las matemáticas son una herramienta muy poderosa que vinieron a resolver grandes necesidades en ingeniería, se han vuelto una herramienta de uso cotidiano en la aplicación de la ingeniería, nos ha permitido desarrollar procesos analíticos que nos permiten la solución de problemas, crear modelos que nos representen sistemas reales, traducir problemas en lenguaje matemático, simplificar procedimientos, organizar ideas y propuestas, de tal manera que a través de un razonamiento crítico encontremos soluciones a problemas en ingeniería de forma precisa, es así que en ingeniería nos han permitido desarrollar ecuaciones que nos llevan a dimensionar un sistema de generación eléctrica con grados de precisión y eficiencia muy altos.

### 1.1 La transformación de la energía eólica

El viento contiene una energía la cual puede ser transformada, según la queramos, en la energía eléctrica, energía mecánica o térmica. Realmente no requerimos grandes velocidades de viento para llegar a producir energía, podríamos llegar a decir que es lo contrario, ya que cuando el viento se vuelve demasiado intenso es necesario detener

<sup>1</sup> \*. Autor para la correspondencia. E-mail:avinfer@hotmail.com Tel.5557296000, Ext. 54645

40 equipos para evitar su deterioro. En muchos de los equipos que vemos hoy en día, la  
41 mayoría de estos comienza a generar a partir de una velocidad de viento de 4 metros  
42 por segundo(m/s) lo cual equivale a 15 km/h. La mayoría de estos equipos entrega su  
43 potencia máxima cuando la velocidad está entre los 12 a 15 m/s lo cual es equivalente  
44 a 40-55 km/h y como bien se dijo antes es crucial ponerla fuera de servicio cuando el  
45 viento alcanza 25m/s lo cual es equivalente a 90 km/h [1].

46 Podemos destacar, que los equipos de generación y control de los aerogeneradores  
47 verticales se encuentran al pie de la estructura, facilitándonos el acceso a los mismos  
48 y por ende abaratando el costo del mantenimiento. Una de las principales desventajas  
49 es que la conversión energética es algo menor en cuanto a otros tipos de  
50 aerogeneradores. En aerogeneradores de eje horizontal, tenemos que conservar una  
51 orientación perpendicular el flujo del viento y con esto captaremos mayor conversión  
52 de energía. Una de las desventajas de estos equipos es que se debe instalar un  
53 mecanismo que oriente el aerogenerador para así compensar la dirección cambiante  
54 del viento [2].

### 55 1.2 Rotor tipo hélice o Aero turbinas rápidas

56 Los aerogeneradores de este tipo llegan a contar con velocidades de punta superiores  
57 a las velocidades de incidencia del viento en el rotor, que pueden llegar a ser de 6 a  
58 14 veces por encima, lo cual los hacen aptos para la generación de electricidad [3]. El  
59 rotor de estos generadores está conectado a las palas las cuáles transforman la  
60 energía cinética del viento en energía mecánica. una vez que el viento atraviesa las  
61 palas del aerogenerador, el movimiento generado rotacional es transmitido a un  
62 multiplicador de velocidad el cual posteriormente estaría conectado al generador  
63 eléctrico. [4].

### 64 1.3 Batería de litio

65 Las baterías de litio se cargan más rápido que otros tipos de baterías, y nos ofrecen  
66 una mayor densidad energética, contando con mayor vida útil. No tienen efecto  
67 memoria por lo cual podrían descargarse al 50% o 100% sin que la batería sufriera  
68 daño. No requieren mantenimiento, ni tampoco generan emisión de gases por lo que  
69 pueden instalarse en lugares con poca ventilación o nula. Son de mayor utilización en  
70 instalaciones fotovoltaicas y especialmente exigentes en el sector industrial, pero cada  
71 vez más a niveles domésticos.

### 72 1.4 Inversor de corriente

73 Un inversor de corriente es un dispositivo que tiene el propósito de transformar la  
74 tensión de una o distintas baterías comúnmente de 12V o 24 V a un voltaje mayor que  
75 puede alcanzar los 110 - 220 voltios o mayor, de acuerdo con lo que se requiera.  
76 También recibe el nombre de convertidor de corriente u ondulator de corriente. Se  
77 utilizan ambas corrientes, corriente alterna (AC) y corriente directa (DC), los inversores  
78 de potencia directamente transforman la corriente directa a un voltaje de salida con  
79 voltaje alterno. Comúnmente los inversores permiten convertir un voltaje de  
80 12VCD/24VCD/48VCD (Corriente directa) a 120/220 VCA (Corriente Alterna) [5].

81  
82  
83  
84



85 1.5 Controlador- regulador de energía

86

87 El Regulador o controlador de energía tiene el propósito de distribuir la corriente  
 88 eléctrica que se genera en el aerogenerador, entre el inversor y el banco de baterías,  
 89 también es la protección hacia las baterías para que no estén sin energía o tengan  
 90 sobre corriente. Cuando la carga de la batería está por debajo del 95 por ciento, el  
 91 controlador proporciona la corriente proveniente del aerogenerador para la carga de la  
 92 batería. Si la carga de la batería se encuentra entre el 96 al 99 por ciento, el controlador  
 93 regula la corriente para evitar la sobre carga de la batería. Al tener una carga total la  
 94 batería, el controlador corta el suministro totalmente.

95 1.6 Velocidad de viento en CDMX

96 En la zona Industrial considerada la velocidad promedio es de 10Km/h [7]. El objetivo  
 97 de este trabajo de investigación es diseñar, calcular y realizar la propuesta para la  
 98 instalación de aerogeneradores con banco de baterías, para el suministro de energía  
 99 eléctrica que alimentara las luminarias de 3 pisos de un edificio de una fábrica  
 100 farmacéutica ubicada en una zona industrial del norte de la Ciudad de México.

101

102 **2. Metodología**

103 2.1 Determinación y descripción de la carga de luminarias instaladas actualmente

104 El consumo promedio mensual es de 151.170 KWh. Realizaremos el cálculo con los  
 105 KWh día, ya que es con lo que se dimensionara el sistema del aerogenerador  
 106 considerando que es la potencia al día calculada es la mayor y sin tanta variación por  
 107 ser una industria con 3 turnos continuos, ver tabla 1.

108

109

**Tabla 1. Carga de luminarias instalada actualmente en edificio Farmacéutico**

Estudio de Consumo Energetico del Edificio Farmaceutico					
Consumo promedio diario					
Zona	Voltaje	Corriente(Amperes)	Watts (Kilowhats)	Horas	Kilowhat hora
Control y Calidad	220	81.81	18	24	432
Muestreo	127	50	6.35	24	152.4
Planta Baja	127	314.96	40	24	960
Primer Piso	127	200	25.4	24	609.6
Vestidores	127	94.48	12	24	288
Almacen	220	77.27	17	12	204
Produccion	220	227.27	50	24	1200
Pesados	220	59.09	13	12	156
Subestacion	127	55.11	7	1	7
Equipos N3	127	74.01	9.4	20	188
Cuarto de maquinas	127	41.73	5.3	20	106
Caseta	127	15.74	2	24	48
Plaza	220	90.9	20	24	480
Mantenimiento	220	45.45	10	24	240
Site	127	4.72	0.6	5	3
Camara fria	127	39.37	5	1	5
<b>Totales</b>		<b>1471.91</b>	<b>241.05</b>	<b>287</b>	<b>5079</b>

110

111

- 112 2.2 Descripción de los elementos que componen la instalación  
 113 El aerogenerador seleccionado en relación costo calidad disponible en el mercado  
 114 actual es el modelo H28 250Kw marca Huaye® de eje horizontal (Ver tabla 2) [8].  
 115 El inversor seleccionado es de la marca BANGZHAO OR OEM® Modelo BZP-250KW,  
 116 cuenta con protección de polaridad inversa de entrada, bajo voltaje, sobretensión,  
 117 sobre corriente de salida, cortocircuito, sobrecalentamiento y variador de frecuencia  
 118 ver tabla 3 [9].  
 119 El controlador elegido es de la marca DEMING® modelo FKJ-GT200KW con pantalla  
 120 LCD 3 fases y voltaje continuo al sistema ver tabla 4 [10]. El banco de baterías está  
 121 formado por baterías Marca Crown® de ciclo profundo 12V 130 A/h ver tabla 5 [11].

**Tabla 2. Descripción General de Aerogenerador**

Turbina Eólica	
Marca	Huaye®
Modelo	H28 250kw
Potencia Nominal	250Kw
Velocidad de Viento	3m/s a 12m/s
Diámetro de rotor	27.7m
Numero de cuchillas	3
Material de cuchillas	FRP
Altura	30 m

**Tabla 3. Descripción General de Inversor de Corriente**

Inversor	
Marca	BANGZHAO OR OEM®
Modelo	BZP-250KW
Frecuencia de salida	50Hz o 60Hz
Tipo de Inversor	DC/AC
Voltaje de entrada	600 V
Potencia de salida Nominal	250Kw
Hilos de salida	3F-1N
Corriente de salida	379A por fase
Eficiencia	93%
Modo de visualización	LCD
Temperatura de trabajo	-25°C a 55°C
Peso	900 Kg

122

**Tabla 4. Descripción General de Controlador de Conexión a Red**

Controlador On grid Híbrido	
Marca	DEMING®
Modelo	FKJ-GT200KW
Potencia Nominal de Turbina	200KW
Potencia Nominal Máxima de Turbina	300Kw

**Tabla 5. Información general de batería Crown®**

Batería	
Fabricante	Crown
Modelo	31dc-130
Tensión	12VCD
Capacidad	130Ah
Tipo	Ciclo Profundo

Tensión nominal de Turbina	≥400 V C.A
Modo de visualización	LCD
Voltaje de carga-descarga de aerogenerador	600 ±5 Vcd
Protección integrada	Fusible CC salida 450A
Temperatura de trabajo	-30°C a 60°C
Peso de Controlador	96 Kg
Certificación	CE Validez 26/03/2021 -25/03/2026

Numero de ciclos	500 al 50%
Altura	24 cm
Ancho	17.14
Largo	33 cm

123

### 124 2.3 Cálculo del sistema eólico

125 El sistema que se está proponiendo tiene que suministrar una carga diaria de  
 126 5079KWh, teniendo en cuenta el voltaje de operación de los aerogeneradores y la  
 127 eficiencia de los inversores que se escogieron para la instalación. Para conocer el nú-  
 128 mero de aerogeneradores necesarios para el sistema utilizaremos la Ec. (1).

$$129 \quad N_{total \text{ aerogeneradores}} = \frac{\text{potencia nominal}}{(\text{factor de dimensionamiento a 98 \%})(\text{potencia nominal aerogen.})}$$

130

131

$$132 \quad N_{total \text{ aerogeneradores}} = \frac{241050 \text{ Watts}}{(0.98)(250,000 \text{ Watts})}$$

133

$$N_{total \text{ aerogeneradores}} = .983 \approx 1 \text{ aerogenerador}$$

134

### 135 2.4 Cálculos para secciones del circuito

#### 136 2.4.1 Corriente máxima de los aerogeneradores

137 Se cuenta con los siguientes datos de placa del equipo, trabaja con un voltaje de 440V  
 138 nominales y tiene una potencia de 250 kilowatts, con Ec. (2), calculamos la corriente  
 139 que generaría el equipo.

140

$$141 \quad I_{max} = \frac{\text{potencia maxima}}{\text{voltaje}} \quad (2) \quad I_{max} = \frac{250KW}{440 V} = 568.18 A$$

142

#### 143 2.4.2 Corriente corregida por temperatura

144 Basándonos en el resultado de la formula anterior, podemos hacer el cálculo de la  
 145 corriente corregida por temperatura, un aerogenerador de la marca Huaye® genera  
 146 una corriente nominal de 568.18 A, con la Ec. (3), se corrige la corriente.

147

$$148 \quad I_{sc 75^{\circ}C} = I_n \left( 1 + \frac{\text{incremento de temperatura respecto a nominal}}{100} \right) \text{coef. de temp ISC} \quad (3)$$

149

$$150 \quad I_{sc 75^{\circ}C} = 568.18 \left( 1 + \frac{75-30}{100} \right) 1.00 \quad I_{sc 75^{\circ}C} = 255.681 A$$

151

152

$$I_{sc} 75^{\circ}C + I_{sc} 30^{\circ}C = \text{corriente de corto circuito corregida}$$

153

$$I_{sc} \text{ corregida por temperatura} = \mathbf{823.861 A}$$

154

## 155 2.5 Conductores Aerogenerador- Regulador

156 Utilizando la NOM-001-SEDE-2012 [12], para basarnos en la selección de los conduc-

157 tores que utilizaremos, seleccionaremos conductor 100% de cobre, a temperatura de

158 90°C para casos extremos de funcionamiento. El sistema del aerogenerador tiene una

159 corriente de 823.861 Amperes corregida por temperatura, el conductor que usaremos

160 es un RHH/RHW-2, XLPE 600 V, 90° C de calibre kcmil 500 de área de 253.4 mm<sup>2</sup>.

161 Que es capaz de soportar hasta 430 Amperes, por lo cual usaremos dos cables por

162 fase, que nos daría 860 Amperes lo cual nos ayuda para la corriente corregida.

163

### 164 2.5.1 Cálculo de la caída de tensión

165 La caída del sistema de los aerogeneradores más retirados del inversor donde se in-

166 terconectará es de vital importancia para saber si el conductor seleccionado es el ade-

167 cuado para la instalación y no genere pérdidas en cobre. Por medio de la Ec. (4) tene-

168 mos:

$$169 \quad \% \text{ caída de tensión} = \frac{2 (\text{longitud de cable})(I_{sc} \text{ modulo corregida a } 75^{\circ}C)}{(\text{sección de conductor mm}^2)(vn)} \quad (4)$$

170

$$171 \quad \% \text{ caída de tensión} = \frac{2 (40m)(823.861 A)}{(253.4 \text{ mm}^2)(440v)} \quad \% \text{ caída de tensión} = \mathbf{0.59\%}$$

172

173 Dado que la caída de tensión en el circuito es menor al 1.5% permitido por norma,

174 según conforme lo estipulado en el artículo 694 de la NOM-001-SEDE-2012, la selec-

175 ción del calibre del conductor cumple con la norma, por lo tanto, la selección de este

176 es correcta.

177

### 178 2.5.3 Determinación de la corriente máxima del circuito

179 En este punto se toma como referencia la capacidad instalada en la empresa para

180 poder así continuar con los cálculos posteriores y hacer la selección correcta de nues-

181 tro sistema eólico. Se tiene una carga máxima instalada es de 241.05KW y un sistema

182 de alimentación trifásica a 220V, utilizamos la Ec. (5).

183

$$184 \quad I_{\max} = \frac{\text{potencia máxima}}{\text{voltaje}} \quad (5) \quad I_{\max} = \frac{241.05KW}{220 V} = \mathbf{1095.68 A}$$

185

186 Con respecto a este resultado se ha elegido una protección, interruptor seccionador  
187 masterpack® NW12HF 1200A, 3 polos, fijo.

188

### 189 2.5.4 Cálculo del banco de baterías

190 Ya que el sistema que se manejara es on grid hibrido para garantizar la continuidad

191 del suministro energético se requiere un banco de baterías, como se observa en la

192 tabla 5, las baterías serán de 12V 130 A/h, y el inversor, así como el controlador ma-  
 193 nejan una tensión nominal de 600 V C.D. Con la Ec. (6) calcularemos el amperaje total  
 194 del banco, la Ec. (7) nos ayudara a determinar la cantidad de baterías que ocupare-  
 195 mos.

$$196 \quad C_{Nombanco} = \frac{Eg (D_{aut})}{(V_{nom})(P_{Dmax})(\eta_{BT})(\eta_{Inv})} = \frac{241,050 W (1 dia)}{(600V)(.50)(.95)(.93)} = \mathbf{909.46A/h} \quad (6)$$

197

198 Donde:

$$C_{Nombanco} = \text{Capacidad que tendra el banco} \quad V_{nom} = \text{Voltaje preestablecido}$$

$$Eg = \text{Energia total a generar} \quad \eta_{BT} = \text{Eficiencia del controlador}$$

$$D_{aut} = \text{Días de autonomia} \quad \eta_{Inv} = \text{Eficiencia del inversor}$$

199

200 Calculando el número de baterías:

201

$$202 \quad NBT = \frac{(V_{nom})(C_{Nombanco})}{(V_{nombat})(C_{nombaterias})} = \frac{(600V)(909.46 A/h)}{(12V)(130A/h)} = 349.79 \approx \mathbf{350 Baterias} \quad (7)$$

203 Donde:

$$NBT = \text{Número de baterias} \quad V_{nombat} = \text{Voltaje nominal de bateria}$$

$$V_{nom} = \text{Voltaje preeestablecido} \quad C_{nombaterias} = \text{Corriente nominal de bateria}$$

$$C_{Nombanco} = \text{Capacidad de Banco}$$

204 2.5.5 Determinación y selección de los conductores para batería-batería y regulador  
 205 baterías

206 Si se conecta más de una batería para el banco se deberán conectar lo más cerca  
 207 posible y se recomienda utilizar un cable de 50mm<sup>2</sup> utilizando la NOM-001-SEDE-  
 208 2012 [12], éste calibre es equivalente a AWG 1/0 el cual soporta una tensión nominal  
 209 de hasta 600 V y una temperatura de operación hasta los 90°C.

210 Cada cable medirá 37cm, el fabricante no especifica la separación de los bornes entre  
 211 ellos, por lo tanto, se da una tolerancia del 35% en este porcentaje incluirá la distancia  
 212 para ponchar las zapatas que se conectaran en las terminales, ver tabla 6, para una  
 213 mejor estabilidad se toma que la separación entre banco a controlador sea de 1.5 me-  
 214 tros, y de controlador a inversor igualmente de 1.5 metros, aunque la distancia del  
 215 banco al regulador variara por la distancia entre bornes esto se sumará en la distancia  
 216 de un conductor, como se observa en la tabla 7..

217

**Tabla 6. Distancia de cable requerido para conexión de banco de 13 baterías**

Cálculo de metros de cable AWG 1/0, para bancos de baterías (m)	
Distancia Estimada entre bornes	0.37

**Tabla 7. Cantidad de metros requeridos para interconectar banco de baterías-regulador y regulador-inversor**

Terminal entre batería a regulador (m)		Terminal entre regulador e inversor	
Negativo a negativo	1.5	Negativo a negativo	1.5

35 por ciento de tolerancia	0.1295
Distancia Total de cable entre bornes	0.50
Metros requeridos para una hilera de 25 baterías	12
Totales para las 10 hileras de 25 baterías	120

Positivo a Positivo	4.5	Positivo a Positivo	1.5
Total de metros para conexión	6	Total de metros para conexión	3

218

219 Considerando la tabla 7, se sabe que se requiere un total de 9 metros, se da un metro  
 220 de tolerancia extra para las conexiones con zapata. Sumando los metros requeridos  
 221 de las conexiones entre equipos y el requerido en banco de baterías se obtiene un  
 222 total de 130 metros, el proveedor solo vende rollos de 100 metros por lo tanto se re-  
 223 querirá comprar 200m.

224

$$\text{Total de metros} = 120m + 10m = \mathbf{130 m}$$

225

226

227

### 3. Resultados y análisis

228

229

230

231

232

233

234

235

### 4. Conclusiones

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

## 256 5. Referencias

257

258

259

260

261

262

263

264

265

266

267

268

269

270

271

272

273

274

275

276

277

278

279

280

281

282

283

284

285

286

287

288

289

290

291

292

293

- Navarro Martínez José Alberto (2010). *Diseño Preliminar de un Aerogenerador de 3MW*, Madrid España, Universidad Politécnica de Madrid.
- Lima F.J, Orellana, F.J. Valencia E.B. (2017). *Diseño y Construcción de un Prototipo de Aerogenerador de Baja Potencia*, Universidad de el Salvador. Salvador.
- García Hernández Luis Salvador (2016). *Energía Eólica y Desarrollo Sostenible en la Región de la Rumorosa*. Tijuana México.
- Rodríguez Buenestado J.F. (2017). *Análisis y Diseño de un Aerogenerador mediante simulación 3D de Dinámica Computacional de Fluidos*, Madrid España, Universidad Carlos III de Madrid.
- Montes Aguilar Gerardo (2014). *Acondicionamiento de un inversor, mediante propuesta de sistema audiovisual auxiliar para comunidades indígenas*, Chihuahua México, Centro de Investigación en materiales avanzados.
- Structuralia, Aerogeneradores de eje vertical y horizontal: tipos, ventajas e inconvenientes [Online] Disponible en: <https://blog.structuralia.com/aerogeneradores-de-eje-vertical-y-horizontal-tipos-ventajas-e-inconvenientes Año:2018>
- Meteoblue obtenida el 15/12/2021 desde el sitio web: <https://www.meteoblue.com/es/tiempo/widget/setupmap/nueva-industrial-vallejo m%c3%a9xico 11537138>
- Alibaba, obtenida el 13/12/2021 desde el sitio web: [https://spanish.alibaba.com/product-detail/wind-turbine-200kw-235kw-250kw-275kw-direct-driven-permanent-generator-250kw-wind-turbine-62007888249.html?spm=a2700.7724857.normal\\_offer.d\\_image.613e305bkHqW1g](https://spanish.alibaba.com/product-detail/wind-turbine-200kw-235kw-250kw-275kw-direct-driven-permanent-generator-250kw-wind-turbine-62007888249.html?spm=a2700.7724857.normal_offer.d_image.613e305bkHqW1g)
- Alibaba obtenida el 13/12/2021 desde el sitio web: [https://spanish.alibaba.com/product-detail/250-kw-industry-power-inverters-with-vfd-and-soft-starter-function-for-shipboard-60277245944.html?spm=a2700.7724857.normal\\_offer.d\\_image.77872fc1nZdfP9](https://spanish.alibaba.com/product-detail/250-kw-industry-power-inverters-with-vfd-and-soft-starter-function-for-shipboard-60277245944.html?spm=a2700.7724857.normal_offer.d_image.77872fc1nZdfP9)
- Alibaba obtenida el 13/12/2021 desde el sitio web: <https://m.spanish.alibaba.com/p-detail/100KW-Wind-Generator-Charge-Controller-for-60747141682.html?s=p>
- Technical Data Sheet Crown, obtenido el 09/2021 desde el sitio web: <http://alternativasolar.com/anterior/baterias-abiertas/620-bateria-crown-31dc130-12v-130ah.html>
- Norma oficial Mexicana, NOM 001 SEDE 2012, segunda sección.

# GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA DE APOYO EN LA APLICACIÓN DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

González Sosa Jesús Vicente<sup>1</sup>, Pineda Norman Amanda Lolita<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Alcaldía Azcapotzalco, C.P. 02200, CDMX

<sup>2</sup>Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería. Circuito Escolar 04360, C.U., Alcaldía Coyoacán C.P. 04510, CDMX.

AP-OSMO13

## Resumen

En la actualidad las tecnologías con el uso de la herramienta virtual en línea han incrementado el interés de los docentes y estudiantes en las diversas áreas de la ingeniería, buscando la mejora continua en los procesos de enseñanza-aprendizaje, aunado a esto se plantea el uso de GeoGebra para el análisis, aplicación y desarrollo en las temáticas de Investigación de Operaciones, formulando con ello la solución en problemas inmersos en la industria. Es importante resaltar que la herramienta se utiliza en línea, de forma gratuita, lo que permite que las comunidades universitarias utilicen GeoGebra para el desarrollo de las metodologías de enseñanza. Se ha observado en diversas investigaciones que los ambientes gráficos, tecnologías, facilitan la comprensión en la solución de los problemas. Los resultados de aplicar la herramienta virtual en línea logran una tendencia para mejorar cada día los procesos de enseñanza con paquetes computacionales de estas características, no solo de la ingeniería sino de las demás áreas de la ciencia y educación, con esto se pretende analizar constantemente nuevos procesos que permiten clarificar las situaciones tangibles a las que los estudiantes se enfrentarán en su desarrollo profesional. Por último, se analiza a futuro generar una línea de desarrollo con las posibles aplicaciones de GeoGebra en los demás ámbitos de la enseñanza.

**Palabras clave:** tecnologías, herramienta virtual, metodología, enseñanza, aprendizaje, educación.

## 1. Introducción

Ya se ha mencionado por varios autores, como (Castro, 2019), que la metodología empleada para la enseñanza de la matemática no incorpora estrategias innovadoras que estimulen al estudiante en el proceso de enseñanza y aprendizaje para hacerlo más activo y participativo en la realización de las actividades educativas. Además, el desconocimiento del manejo y utilización de las tecnologías de la información hace que los estudiantes sean considerados como analfabetos digitales en algunos casos. (Jiménez y Jiménez, 2017) también mencionan que se hace evidente la necesidad que existe entre los profesores de matemáticas el uso de software para hacer clases dinámicas y amenas, que deben capacitarse en el uso de recursos tecnológicos o aplicaciones como GeoGebra, sobre el cual en su artículo proponen elaborar cursos de capacitación que habilite a dichos docentes en su uso, con el objetivo de mejorar su desempeño docente. Con este software los docentes estarían creando estrategias

<sup>1</sup> Autor para la correspondencia. E-mail.: [jvgs@azc.uam.mx](mailto:jvgs@azc.uam.mx), Tel. 5553189532, ext. 142.



45 para que los alumnos logren vincular los conceptos matemáticos con problemas de la  
46 vida cotidiana.

47 Sin embargo, como reconocen (Arteaga et al., 2019), si bien, los docentes reconocen  
48 las amplias posibilidades que ofrece el uso de este software en el proceso de  
49 enseñanza–aprendizaje de la matemática, no podemos afirmar que su uso se haya  
50 generalizado y mucho menos que esto se haya convertido en una práctica habitual en  
51 el desarrollo de las clases, lo que obedece a múltiples razones, entre ellas se pueden  
52 mencionar: en primer lugar, el miedo y la insuficiente preparación de los profesores  
53 para hacer uso de esta herramienta tecnológica en sus clases, y en segundo lugar, el  
54 equipamiento tecnológico con que actualmente cuentan los centros de enseñanza, el  
55 cual resulta insuficiente y no siempre está en las mejores condiciones.

56 GeoGebra, como lo define en su propia página de internet  
57 (<https://www.geogebra.org/about>) es un software de matemáticas para todo nivel  
58 educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros  
59 gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo. GeoGebra, con su libre  
60 agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento. En todo el mundo,  
61 millones de entusiastas lo adoptan y comparten diseños y aplicaciones de GeoGebra.  
62 Logrando conceptualizar y armonizar el aspecto experimental como parte de una  
63 organización didáctica y disciplinar que enlaza matemática, ciencias, ingeniería y  
64 tecnología (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics). La comunidad  
65 que congrega lo extiende como recurso mundial, innovador para la enseñanza y el  
66 aprendizaje.

67 En los últimos años ya varios autores refieren el uso de GeoGebra como herramienta  
68 para la enseñanza de las matemáticas en las aulas de distintos niveles educativos. Por  
69 ejemplo, (Pabón et al., 2015) analizan las competencias de jóvenes investigadores  
70 utilizando software GeoGebra y permitió conocer la experiencia compartida a partir de  
71 una investigación cualitativa y acción participante en una muestra de 27 estudiantes  
72 del grado décimo.

73 (León, 2017) realizó un proyecto de investigación para diseñar un laboratorio de  
74 ciencias donde se analice el uso del pensamiento covariacional en prácticas  
75 experimentales que potencien el trabajo en grupo y la convivencia con estudiantes de  
76 poblaciones vulnerables. Apoya el trabajo experimental con el uso de GeoGebra para  
77 que los estudiantes analicen gráficamente la covariación de algunas magnitudes  
78 definidas por la necesidad de resolver problemas de la cotidianidad.

79 Por otro lado, (Guevara, 2021) realiza una investigación de tipo experimental y con  
80 diseño cuasi experimental donde aplicó una prueba escrita en un contexto de  
81 educación a distancia a una muestra no probabilística de 60 alumnos, de los cuales 30  
82 conformaron el grupo experimental y 30 el grupo de control. En los resultados se  
83 observó que el grupo experimental tránsito de un nivel de proceso en el pretest con  
84 93% a un nivel logrado en el postest con 73%, de una media de 6.63 a una media de  
85 11.47. Asimismo el Sig del postest del grupo experimental es  $<0.01$  lo cual evidencia  
86 una influencia altamente significativa del software educativo Geogebra en el desarrollo  
87 de las competencias matemáticas en los estudiantes de quinto año de secundaria de  
88 la Institución Educativa Santa Edelmira de Víctor Larco, cuyo experimento se aplicó en  
89 el año 2021.

90 Así mismo, (Salas, 2018) realiza una investigación cuantitativa con el propósito de  
91 analizar el impacto del servicio en la nube GeoGebra en la Unidad didáctica  
92 Desigualdades lineales. La muestra está compuesta por 78 estudiantes que cursaron  
93 la asignatura Matemáticas intermedias para los negocios durante los ciclos escolares  
94 2017, 2016 y 2015. El grupo experimental (31 alumnos) realizó cuatro prácticas de  
95 laboratorio sobre los temas de Desigualdad lineal, Sistema de desigualdades lineales,  
96 Función objetivo y Aplicaciones de las desigualdades por medio del servicio en la nube  
97 GeoGebra. Los resultados obtenidos permiten afirmar que GeoGebra es una  
98 aplicación útil y fácil para graficar las funciones, identificar las regiones y coordenadas  
99 en la gráfica, reconocer la región solución y asimilar el conocimiento sobre los temas  
100 del álgebra. Incluso, los estudiantes están satisfechos de utilizar esta herramienta  
101 tecnológica en la Unidad didáctica Desigualdades lineales.

102 (Marcelo et al., 2018) realizaron una investigación de tipo bibliográfica, descriptiva y  
103 cuasi experimental, a la que se planteó una hipótesis a demostrar. Se consideró un  
104 plan curricular que fue desarrollado por un grupo de control (método tradicional – 38  
105 estudiantes) y uno experimental (uso de GeoGebra - 37 estudiantes) y fueron  
106 sometidos a una prueba estadística Z, que permitió determinar que el uso de  
107 GeoGebra como herramienta de apoyo académico, incide positivamente en el proceso  
108 de enseñanza aprendizaje de representación de resultados de las gráficas de  
109 funciones.

110 Aspectos sobresalientes con el uso de GeoGebra, ofrecen alcances inductivos y  
111 analíticos en cada una de las aplicaciones en las que se presenta la herramienta para  
112 la formulación de solución en problemas académicos (Villagrán et al., 2018).

113 Con lo descrito se logra identificar el interés por utilizar la herramienta de GeoGebra  
114 en las áreas comunes de la ingeniería, por lo cual, en este trabajo se presenta la  
115 estructura para el uso en investigación de operaciones con aplicaciones de  
116 programación lineal.

117

## 118 **2. Metodología o desarrollo**

119

120 En la actualidad el uso de entornos, como un software, en línea permite desarrollar  
121 habilidades en los docentes y estudiantes de comunidades universitarias para el  
122 aprendizaje en las diferentes áreas de la ciencia, por lo cual en este trabajo se plasman  
123 ideas puntuales para el uso de la herramienta de GeoGebra en problemas de  
124 programación lineal dentro del análisis en investigación de operaciones.

125 Los elementos fundamentales para el uso de la herramienta se describen en el  
126 diagrama que se muestra en la Fig. (1).

127

# GeoGebra en INVO

## Identificar el problema a resolver

- análisis de variables
- factores dependientes del tiempo

## Obtención del modelo

- identificar la función objetivo
- identificar las restricciones

## Aplicación de la herramienta GeoGebra

- introducir datos en el software
- obtener gráficas
- interpretación de los resultados

Figura 1. Aplicación de GeoGebra en Investigación de Operaciones

128  
129  
130

Lo descrito en la Fig. (1), tiene la tendencia de aplicarse en forma directa a problemáticas que se expresan por medio de modelos matemáticos, vinculados con herramientas para obtener funciones y gráficas, con el propósito de ofertar solución al caso de análisis.

Para el caso en la identificación del problema a resolver, se debe especificar de manera clara las variables que intervienen en el problema, al igual que los parámetros dependientes del tiempo que permiten formular de manera precisa el problema y sus posibles alternativas de solución, recordando que la mayor parte del desarrollo se verá reflejado con modelos matemáticos y sus representaciones gráficas.

Con respecto a este mismo punto se plantea que los problemas se trabajen en dos dimensiones, ello debido a que, por características de GeoGebra en línea, solo se representaran, aplicaciones con dicha restricción, dado que si se hace uso de tres dimensiones los resultados se mostrarían en el espacio y es algo con lo cual no se ha trabajado la programación lineal en este documento.

Para la obtención del modelo, etapa dos, se debe contemplar un caso de estudio que permita identificar parámetros en investigación de operaciones, como lo son: ganancias, disponibilidad, recursos, inventarios, costos, distribución, entre otros; esto para lograr plasmar el problema con las variables que se utilizaran en los modelos matemáticos y en la herramienta de GeoGebra.

Tanto la función objetivo como las restricciones se analizan en conjunto para lograr identificar las posibles soluciones del problema y mantener latente las tendencias de mejora en cada una de las variables que se utilizan para identificar el entorno denominado solución.

La última etapa corresponde a manipular el software de GeoGebra, en donde se colocan las variables con los coeficientes, concatenando todas estas para lograr identificarlas dentro de la herramienta. Posteriormente, se hace uso de subherramientas en el mismo programa para permitir la intersección de puntos con líneas que forman parte de la solución del problema en cuestión. A partir de ello se

159 obtienen gráficas que permite identificar áreas, que se entrelazan, para ofrecer la  
 160 optimización del sistema, que, en muchos de los casos, de manera específica, se  
 161 busca maximizar el sistema como parte de la solución al modelo matemático con las  
 162 variables definidas. Para la interpretación de los resultados se analizan las gráficas y  
 163 se ubican líneas de tendencia para lograr los puntos máximos y mínimos de la función  
 164 objetivo que se identificó en las etapas anteriores.

165  
 166 Aplicación de GeoGebra en Investigación de Operaciones: caso de estudio.  
 167 Para la aplicación de la herramienta como apoyo en Investigación de Operaciones, se  
 168 plantea el siguiente caso de estudio para ejemplificar el uso de GeoGebra.

169  
 170 Considere un negocio que se dedica a la venta de productos artesanales, en donde se  
 171 elaboran ollas y jarras de barro, tomando en cuenta que el fabricante tiene a su carga  
 172 3 artesanos. Las ganancias que se presentan por producto son \$35.00 y \$20.00  
 173 respectivamente (ollas y jarras), se hace uso de la información que se presenta en la  
 174 Tab. (1) para el sistema, debe observarse que las variables a utilizar en este caso son  
 175  $x_1$ (ollas) y  $x_2$ (jarras).

176  
 177 **Tabla 1. Datos para el desarrollo del modelo del caso de estudio.**

	Variables		Demanda
	$x_1$	$x_2$	
Artesano A	2	1	6
Artesano B	1	1	6
Artesano C	2	1	10

178  
 179 La Tab. (1) muestra los valores y variables correspondientes para elaborar el modelo  
 180 matemático que contiene la función objetivo y las restricciones.  
 181 Por lo que la función objetivo se obtiene con los datos de la ganancia del sistema,  
 182 quedando expresado en la Ec. (1).

183  
 184 Ecuación 1.  $Z = 3x_1 + 2x_2$

185  
 186 Por otro lado, se colocan las restricciones, Ecs. (2)-(5).

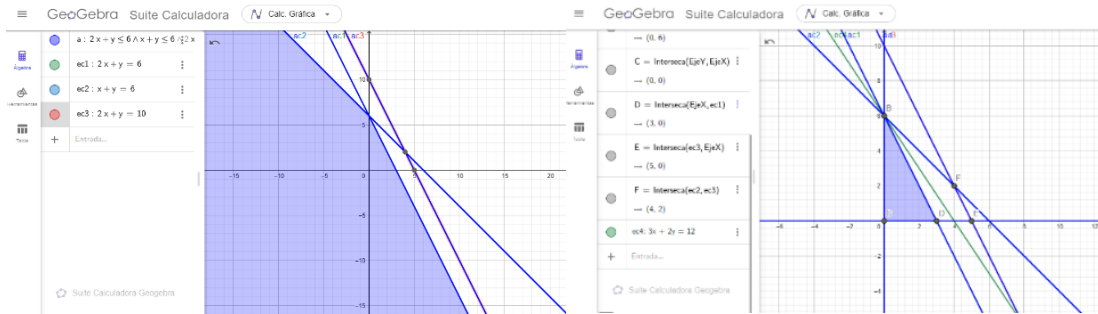
187 Ecuación 2.  $2x_1 + x_2 \leq 6$

188 Ecuación 3.  $x_1 + x_2 \leq 6$

Ecuación 4.  $2x_1 + x_2 \leq 10$

Ecuación 5  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

189  
 190 Posteriormente, se insertan las restricciones y función objetivo en el software de  
 191 GeoGebra, como se muestra en la Fig. (2).



**Figura 2. Implementación de los modelos matemáticos en GeoGebra**

192  
193  
194

En la Fig. (2), se logran observar las gráficas obtenidas mediante la herramienta en línea, en donde se ubican las ecuaciones correspondientes con las características para lograr el resultado, en este caso, las gráficas.

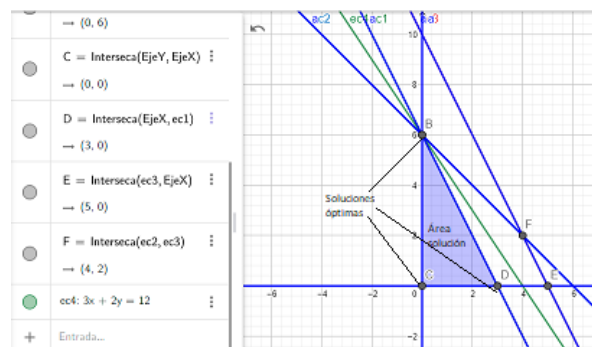
Como tal la aplicación de GeoGebra en investigación de operaciones permite obtener las alternativas de solución del problema en donde se maximiza el sistema, dentro de las ecuaciones y restricciones se tienen los símbolos de menor igual, lo cual indica de manera puntual que se analiza la maximización y el área sombreada ofrece la solución, lo cual se describirá en el siguiente apartado de resultados.

203  
204  
205

### 3. Resultados y análisis

Como parte fundamental en la resolución en problemas con GeoGebra se logró identificar las posibles soluciones del caso que sirvió como ejemplo para su aplicación, en donde la sección sombreada corresponde al área solución, como se muestra en la Fig. (3).

206  
207  
208  
209



**Figura 3. Área solución y soluciones óptimas.**

210  
211  
212

Desde el punto de vista general GeoGebra ofrece la alternativa de visualizar las soluciones de un problema teórico, traducido a un modelo matemático con tendencias para analizar a futuro el impacto de esta herramienta en solución de problemas para las diferentes áreas de la ingeniería, con modelos como el que se presenta en este trabajo. Es importante resaltar que en la actualidad existen diversas herramientas en línea que logran identificar soluciones a problemas tangibles de las áreas comunes, y de ahí la inquietud de los autores por ofrecer nuevas alternativas en los procesos de aprendizaje para las comunidades universitarias.

220

221 Para el caso presentado se tiene la siguiente solución en la maximizar el problema y  
222 que las ganancias mejoren en la producción artesanal.  
223

$$Z = 12$$

en donde:

224  $x_1 = 0$  y  $x_2 = 6$

alternativas:

área sombreada

225

226 El resultado muestra que debe existir un mayor interés en la producción de jarras para  
227 mejorar la producción y las ganancias del negocio. Es relevante mencionar que las  
228 soluciones, como alternativas, se deben evaluar en el sitio de fabricación para lograr  
229 identificar las posibles retroalimentaciones del sistema y ampliar las variables para  
230 enriquecer la aplicación de GeoGebra.

231 La experiencia de los autores, con esta herramienta permite, en dado momento,  
232 mejorar los métodos de enseñanza-aprendizaje en las comunidades y ofrecer  
233 alternativas para la comprensión en casos de estudio con GeoGebra.  
234

#### 235 4. Conclusiones

236

237 El uso de una metodología, de tres etapas, como la mostrada en este artículo, permite  
238 enfocarse en la aplicación de herramientas en línea para dar solución a casos de  
239 estudio, en particular en este trabajo, de investigación de operaciones en conjunto con  
240 la programación lineal.

241 La herramienta de GeoGebra ofrece resultados satisfactorios, en el área aplicada,  
242 apoyándose en la visualización gráfica, que permite comprender y entender lo que  
243 sucede con los fenómenos matemáticos traducidos a entornos con estas  
244 características.

245 Es de gran interés seguir trabajando con estos ambientes tecnológicos para mejorar  
246 los procesos educativos y fomentar el uso de estas herramientas, con tendencias a  
247 establecer habilidades en docentes y estudiantes para su futuro como parte  
248 fundamental en su proceso de aprendizaje.

249 Una de las ventajas que ofrece GeoGebra, es el uso en línea, lo cual no requiere la  
250 instalación en el equipo de cómputo y así se facilita su aplicación en comunidades  
251 educativas de todos los niveles académicos, considerando que en las instalaciones se  
252 encuentran los laboratorios tecnológicos con los equipos necesarios para utilizarse en  
253 la impartición de clases.

254 Por último, se hace hincapié en seguir trabajando con las herramientas en línea para  
255 contar con apoyos en la docencia a los diferentes niveles educativos, fortaleciendo la  
256 mejora continua en las comunidades académicas.  
257

258

259

## 260 Referencias

- 261 • Arteaga V, E., Medina M, J. F., & Del Sol Martínez, J. L. (2019). *El GeoGebra:*  
262 *una herramienta tecnológica para aprender matemática en la Secundaria*  
263 *Básica haciendo matemática*. Revista Conrado, 15(70), 102-108.
- 264 • Castro, L. (2019). *Programa GeoGebra y su aplicación en la enseñanza de la*  
265 *matemática*. HOLOPRAXIS Ciencia, Tecnología e Innovación. 3(2), 116-133.  
266 ISSN 2588-0942.
- 267 • Guevara, R. (2021). *GeoGebra en el desarrollo de competencias matemáticas,*  
268 *en estudiantes de la institución educativa Santa Edelmira, Víctor Larco 2021*.  
269 Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, Ciudad de México, México.,  
270 5(4), ISN 2707-2207 / ISSN 2707-2215 (en línea),  
271 [https://doi.org/10.37811/cl\\_rcm.v5i4.683](https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v5i4.683) p.5168,
- 272 • Jiménez, J. y Jiménez, S. (2017). *GeoGebra, una propuesta para innovar el*  
273 *proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas*. Revista Electrónica sobre  
274 Tecnología, Educación y Sociedad. 4(7), 1-17. ISSN 2448 – 6493.
- 275 • León, C. (2017). *El pensamiento covariacional y GeoGebra: herramientas para*  
276 *la explicación científica de algunas realidades*. Tecné, Episteme y Didaxis, ted,  
277 42, 159-171.
- 278 • Marcelo, C. M. F., Rodrigo, G. M. J., & Mario, V. G. J. (2018). *Uso De GeoGebra*  
279 *Y Su Incidencia En El Proceso Enseñanza- Aprendizaje De Grafica De*  
280 *Funciones En El Nivel Superior*. European Scientific Journal, ESJ, 14(21), 1.  
281 <https://doi.org/10.19044/esj.2018.v14n21p1>
- 282 • Pabón G, J. A, & Nieto S, Z. C., & Gómez C, C. A. (2015). *Modelación*  
283 *matemática y GEOGEBRA en el desarrollo de competencias en jóvenes*  
284 *investigadores*. Revista Logos, Ciencia & Tecnología, 7(1),65-70. ISSN: 2145-  
285 549X. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=517751487008>
- 286 • Salas R., R. A. (2018). *Uso del servicio en la nube GeoGebra durante el proceso*  
287 *enseñanza-aprendizaje sobre las matemáticas*. Revista Iberoamericana para la  
288 *Investigación y el Desarrollo Educativo*. 8(16), ISSN 2007-7467. DOI:  
289 10.23913/ride.v8i16.331, 23-52.
- 290 • Villagrán C, W. J., Cruz S, E. L., Barahona A., F. R., Barrera C., O. B. y Insuasti  
291 Castelo, R. M. (2018). *Utilización de GEOGEBRA como herramienta*  
292 *metodológica en la enseñanza de la geometría Analítica y su incidencia en el*  
293 *control del rendimiento académico de estudiantes del primer semestre de*  
294 *ingeniería*. 4(4), 128-144. ISSN: 2477-8818.  
295 <http://dx.doi.org/10.23857/dom.cien.pocaip.2018.vol.4.n.215-223>

## ANÁLISIS MEDIANTE MINERÍA DE DATOS DEL CRIMEN DE FEMINICIDIOS EN LA CIUDAD DE MÉXICO

Ulloa Arellano Víctor Manuel<sup>1\*</sup>, Quijada Monroy Verónica<sup>2</sup> y Kenya García Cruz<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup> Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM. San Juan Totoltepec S/N,  
Santa Cruz Acatlán. Naucalpan Estado de México. C.P. 53150

AP- POSM014

### Resumen

La minería de datos es una rama de la inteligencia artificial cuyo objetivo es la aplicación de métodos estadísticos y matemáticos para la construcción de modelos explicativos relativos a problemas específicos. Estas técnicas permiten el análisis de grandes conjuntos de datos y la extracción de conocimiento. En la presente propuesta, se aplican métodos de minería de datos, específicamente árboles de decisión y bosques aleatorios, los cuales son técnicas supervisadas de clasificación para el análisis de la información relativa a carpetas de investigación de la Fiscalía General de Justicia de la Ciudad de México y al programa "Abogadas de las Mujeres", obtenida del Portal de Datos Abiertos de esta entidad federativa. Dicha información contiene datos sobre delitos violentos entre los que se encuentra el crimen de feminicidio; entre otras variables se tiene la edad de la víctima, ocupación de la persona agresora, nivel de consanguinidad y estado civil, entre otras. La finalidad de este trabajo es proponer un modelo de clasificación basado en árboles de decisión y bosques aleatorios para que, con base en ciertas características y condiciones de las personas, sea posible estimar riesgos de ser víctima de feminicidio. Los árboles de decisión y los bosques aleatorios se basan en la teoría matemática de la información, teoría de grafos y en teoría de la probabilidad.

**Palabras clave:** árbol, decisión, bosque, aleatorio, algoritmo.

### 1. Introducción

Según el Título segundo, Capítulo 1, artículo 6, numeral VIII de la Ley General de Acceso de las Mujeres a una Vida Libre de Violencia (2008), se considera al feminicidio como "Toda acción u omisión que constituye la forma extrema de violencia contra las mujeres producto de la violación de sus derechos humanos y que puede culminar en homicidio u otras formas de muerte violenta de mujeres" (p. 6); asimismo, en el artículo 325 del Código Penal Federal (1931) se determina que "Comete el delito de feminicidio quien priva de la vida a una mujer por razones de género..." (p.110); se establecen penas de cuarenta a sesenta años de prisión y de quinientos a mil días de multa. Para atender la problemática, el "Programa Abogadas de las Mujeres" inició como una estrategia de la Secretaría de las Mujeres en marzo de 2019 con el fin de favorecer el acceso a la justicia de las mujeres con perspectiva de género, al brindar orientación y asesoría jurídica a mujeres y niñas víctimas de delitos por violencia de género, en coordinaciones territoriales y fiscalías especializadas de la Fiscalía General de Justicia de la Ciudad de México (Gobierno de la Ciudad de México, 2019). Dada la gravedad

<sup>1</sup> Autor para la correspondencia. E-mail: victormu@acatlan.unam.mx



43 de este delito, resulta prioritaria la aplicación de métodos rigurosos como son los  
44 métodos supervisados de clasificación, para la estimación del riesgo de las mujeres  
45 ante este crimen.

46

## 47 2. Desarrollo

48

### 49 2.1 Métodos supervisados de clasificación

50

#### 51 2.1.1 Árboles de decisión y bosques aleatorios

52 Considérese un conjunto de elementos cada uno con varios atributos que permiten  
53 distintos tipos de clasificación. La clasificación de los elementos de un conjunto puede  
54 esquematizarse con un grafo, generalmente de tipo árbol, en el cual, los atributos de  
55 los elementos se representan con nodos. Este tipo de árbol, se denomina árbol de  
56 decisión. De acuerdo con Minguillón & Pujol (2002) un árbol de decisión  $T$  es un grafo  
57  $n$ -ario con un conjunto de nodos  $\tilde{T}$ . Cuando  $n = 2$ , el árbol es binario. Su principal  
58 aplicación son la clasificación de los elementos de un conjunto, con base en criterios  
59 de partición que discriminen de forma tal que se obtengan los nodos más puros.  
60 Hernández et al. (2005) señalan que el criterio general busca la partición  $s$  con el  
61 menor  $I(s)$  el cual se define en la Ec. (1).

62

$$63 \text{ Ecuación 1. } I(s) = \sum_{j=1..n} p_j \cdot f(p_j^1, p_j^2, \dots, p_j^c)$$

64

65 En donde  $n$  es el número de nodos que se desprenden de la partición,  $p_j$  es la  
66 probabilidad de llegar al nodo  $j$  y  $p_j^k$  es la proporción de elementos de la clase  $k$  en  
67 el nodo  $j$ , para  $k = 1, 2, \dots, c$ . En este sentido uno de los criterios para la selección de  
68 la variable o atributo que clasifique de manera óptima a los elementos de un conjunto,  
69 se deriva de la teoría matemática de la información, específicamente del concepto de  
70 entropía. Shannon (1948) establece que, dado un conjunto de eventos  $A =$   
71  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  con probabilidades de ocurrencia  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  y considerando al bit  
72 como unidad de medición, la información relativa al conocimiento de un evento  $A_i$  y la  
73 información media del conjunto  $A$  vienen dadas respectivamente por las Ecs. (2) y (3).

74

$$75 \text{ Ecuación 2. } I(A_i) = \log_2 \left( \frac{1}{p_i} \right) = -\log_2(p_i)$$

76

$$77 \text{ Ecuación 3. } I(A) = \sum_{i=1}^n p_i (A_i) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i)$$

78

79 Con base en (2) y (3) García et al. (2018), al aplicar el concepto de entropía a  
80 problemas de clasificación, es posible medir la ganancia en el poder de discriminación  
81 (también conocido como ganancia de información) de un atributo  $A_i$  mediante la Ec.  
82 (4).

83

84

$$\text{Ecuación 4. } G(A_i) = I - I(A_i)$$

85

Donde  $I$  es la información que se tiene antes de utilizar el atributo,  $I(A_i)$  es la

86

información después de ser utilizado y a su vez,  $I$  e  $I(A_i)$  vienen dadas por las Ecs.

87

(5) y (6).

88

89

$$\text{Ecuación 5. } I = - \sum_{c=1}^{nc} \frac{n_c}{n} \log_2 \left( \frac{n_c}{n} \right)$$

90

91

$$\text{Ecuación 6. } I(A_i) = \sum_{j=1}^{nv(A_i)} \frac{n_{ij}}{n} I_{ij} ; I_{ij} = - \sum_{k=1}^{nc} \frac{n_{ijk}}{n_{ij}} \log_2 \left( \frac{n_{ijk}}{n_{ij}} \right)$$

92

93

En donde  $nc$  corresponde al número de clases;  $n_c$  es el número de elementos de la

94

clase  $c$ ;  $n$  es el número total de elementos del conjunto;  $nv(A_i)$  es el total de valores

95

del atributo  $A_i$ ;  $n_{ij}$  denota el número de elementos con el valor  $j$  en  $A_i$ ;  $n_{ijk}$  representa

96

el número de elementos con valor  $j$  en  $A_i$  y que además pertenecen a la clase  $k$ . Con

97

base en las heurísticas anteriores, se desarrollaron algoritmos de clasificación y

98

predicción tales como ID3, C4.5. Según García et al. (2018), estos algoritmos se

99

consideran métodos supervisados de clasificación al dividir al conjunto de datos objeto

100

de estudio, en dos subconjuntos, uno para entrenamiento del algoritmo y otro para

101

prueba. Posteriormente a estos métodos se les incorpora un carácter de mejora

102

iterativa y se llega al concepto de bosques aleatorios los cuales ganan precisión en

103

sus resultados de forma significativa.

104

105

#### 2.1.2 Aplicación en la clasificación del riesgo de feminicidio

106

La información fue obtenida del portal de datos abiertos de la Ciudad de México, en

107

particular sobre las atenciones de abogadas de las mujeres relativas delitos violentos.

108

Desde marzo de 2019 a febrero de 2022, se cuentan con 109,115 registros. Para el

109

presente estudio se obtuvo un subconjunto contenido en los 1180 casos que

110

corresponden a riesgo de feminicidio. Sobre este subconjunto se seleccionaron nueve

111

variables predictoras a efecto de clasificar el riesgo de feminicidio en bajo o alto. Las

112

variables utilizadas son: nacionalidad, estado civil, edad, número de hijos, relación con

113

la persona agresora, ocupación de la persona agresora y estatus de carpeta de

114

investigación. Con la finalidad de estandarizar la información, las variables estado civil,

115

relación con la persona agresora y ocupación de la persona agresora, fueron acotadas

116

con base en la Clasificación de Parentescos (INEGI, s.f.) y en el Sistema Nacional de

117

Clasificación de Ocupaciones (INEGI, 2019). En la primera parte de la investigación,

118

se construye un árbol de decisión con el subconjunto de 1180 registros.

119

Posteriormente y con el objetivo de obtener el modelo óptimo, se aplica la técnica de

120

bosques aleatorios, sin embargo, fue necesario eliminar los registros con datos

121

ausentes ya que, de no ser así, el algoritmo falla. Con esto el subconjunto se reduce

122

a un total de 575 observaciones. Es importante mencionar que esto repercute en la

123

precisión del modelo. Tanto para el árbol de decisión como para el bosque aleatorio,

124

se utilizaron un set de entrenamiento correspondiente al 65% de los datos del

125 subconjunto estudiado y un set de prueba correspondiente 35% al subconjunto  
 126 analizado.

127

128 **3. Resultados y análisis**

129 Al implantar en el software *R* el algoritmo supervisado de clasificación, se obtiene el  
 130 árbol de decisión y su formulación en reglas que se muestran respectivamente en las  
 131 figuras (1) y (2).

132

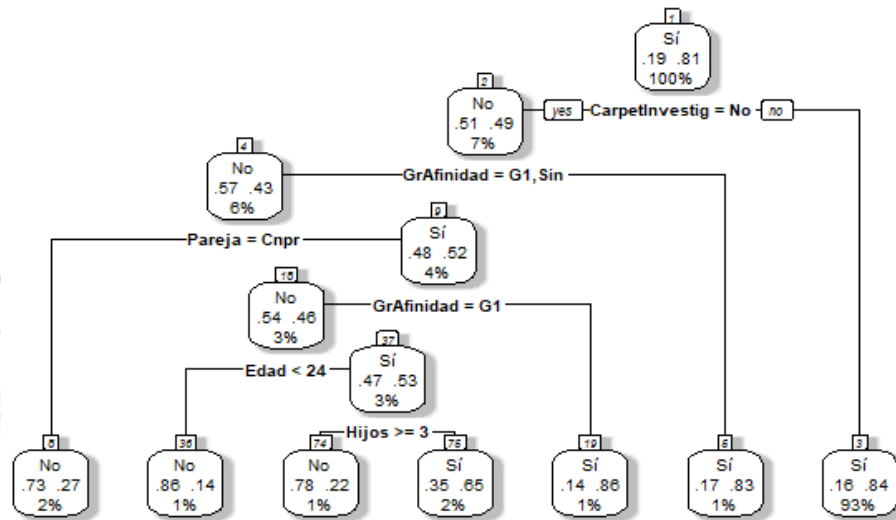


Figura 1.

133

134

135

- 1) root 1182 223 Sí (0.1886633 0.8113367)
- 2) CarpetInvestig=No 84 41 No (0.5119048 0.4880952)
- 4) GrAfinidad=G1,Sin 72 31 No (0.5694444 0.4305556)
- 8) Pareja=Con pareja 26 7 No (0.7307692 0.2692308) \*
- 9) Pareja=Sin pareja 46 22 Sí (0.4782609 0.5217391)
- 18) GrAfinidad=G1 39 18 No (0.5384615 0.4615385)
- 36) Edad< 23.5 7 1 No (0.8571429 0.1428571) \*
- 37) Edad>=23.5 32 15 Sí (0.4687500 0.5312500)
- 74) Hijos>=2.5 9 2 No (0.7777778 0.2222222) \*
- 75) Hijos< 2.5 23 8 Sí (0.3478261 0.6521739) \*
- 19) GrAfinidad=Sin 7 1 Sí (0.1428571 0.8571429) \*
- 5) GrAfinidad=Otro 12 2 Sí (0.1666667 0.8333333) \*
- 3) CarpetInvestig=Sí 1098 180 Sí (0.1639344 0.8360656) \*

Figura 2.

136

137

138

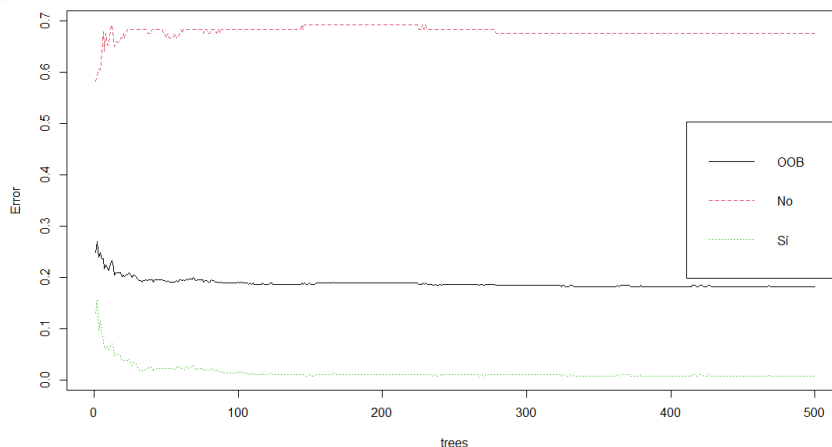
139 Se observa que el modelo elige como variables de clasificación en orden de  
 140 importancia de mayor a menor el *estatus de la carpeta de investigación*; *grado de*  
 141 *afinidad con la persona agresora*; *estado civil*; *edad de la víctima* y *número de hijos de*  
 142 *la víctima*. La figura (3) muestra la matriz de confusión de la cual se desprende que el  
 143 modelo tiene en la clasificación de riesgo de feminicidio, una tasa de 17% de falsos  
 144 positivos y una tasa de 2% de falsos negativos. Asimismo, en los estadísticos de la  
 145 figura (3) se observa una exactitud del modelo de 80.42%. Es importante mencionar  
 146 que, si bien es deseable que ambas tasas sean lo menores posible, se prefiere para

147 el tema de estudio de clasificación del riesgo de feminicidio, la disminución de la tasa  
 148 de falsos negativos, es decir, la prioridad es un modelo que no clasifique riesgos de  
 149 feminicidio como bajo cuando en realidad es alto.

	Reference	Accuracy : 0.8042
Prediction	No Sí	95% CI : (0.7707, 0.8348)
No	16 13	No Information Rate : 0.7994
Sí	108 481	P-value [Acc > NIR] : 0.4045
		Kappa : 0.144
		Mcnemar's Test P-value : <2e-16

150 **Figura 3.**

151  
 152 Dado que los resultados anteriores corresponden a un solo árbol de decisión, se  
 153 procedió a utilizar un algoritmo iterativo para generar 500 árboles de decisión, es decir,  
 154 se utiliza el método de bosques aleatorios, a efecto de obtener el árbol óptimo de  
 155 clasificación. En la figura (4) se ilustra la convergencia del modelo. Se debe destacar  
 156 que se reduce ligeramente el error de clasificación para el riesgo de feminicidio bajo  
 157 y se reduce notablemente el error para la clasificación para el riesgo de feminicidio  
 158 alto.



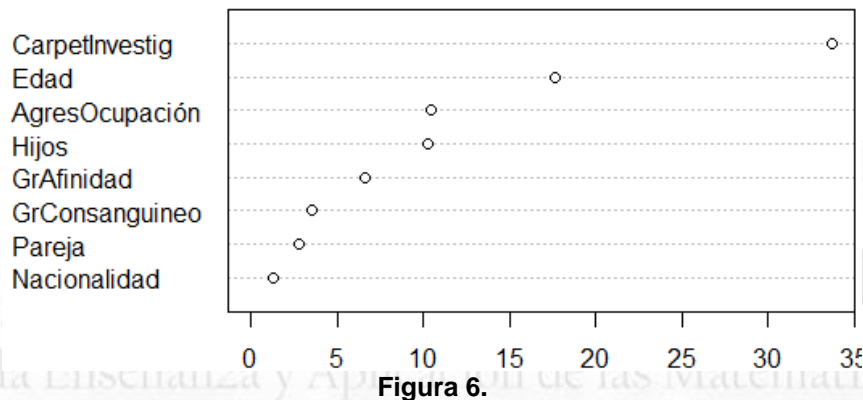
159 **Figura 4.**

160  
 161

	Reference	Accuracy : 0.8957
Prediction	No Sí	95% CI : (0.8248, 0.9449)
No	0.13 0.00	No Information Rate : 0.7652
Sí	0.10 0.77	P-value [Acc > NIR] : 0.0002887
		Kappa : 0.6567
		Mcnemar's Test P-value : 0.0014962

162 **Figura 5.**  
 163 En la matriz de confusión de la figura (5) se aprecia que la tasa de falsos positivos es  
 164 de 10% mientras que la tasa de falsos negativos es de 0%. Adicionalmente la exactitud

165 del modelo de clasificación del riesgo de feminicidio asciende a 89.57%. Por otra parte,  
 166 la figura (6) indica que el algoritmo de bosque aleatorio utilizó para la clasificación del  
 167 riesgo de feminicidio en orden de importancia de mayor a menor las variables *estatus*  
 168 *de la carpeta de investigación; edad de la víctima, ocupación de la persona agresora,*  
 169 *y número de hijos de la víctima* y con menor nivel de relevancia, grado de afinidad con  
 170 persona agresora, grado de consanguinidad con la persona agresora, estado civil de  
 171 la víctima y nacionalidad de la víctima. Estas variables también se denominan  
 172 predictoras.  
 173



174  
 175  
 176



177  
 178  
 179  
 180  
 181  
 182

Figura 7.

La figura (7) muestra en el gradiente del color verde el nivel de importancia en las variables de clasificación o predictoras y el gradiente del color morado, la intensidad de la relación entre las variables de clasificación o predictoras.

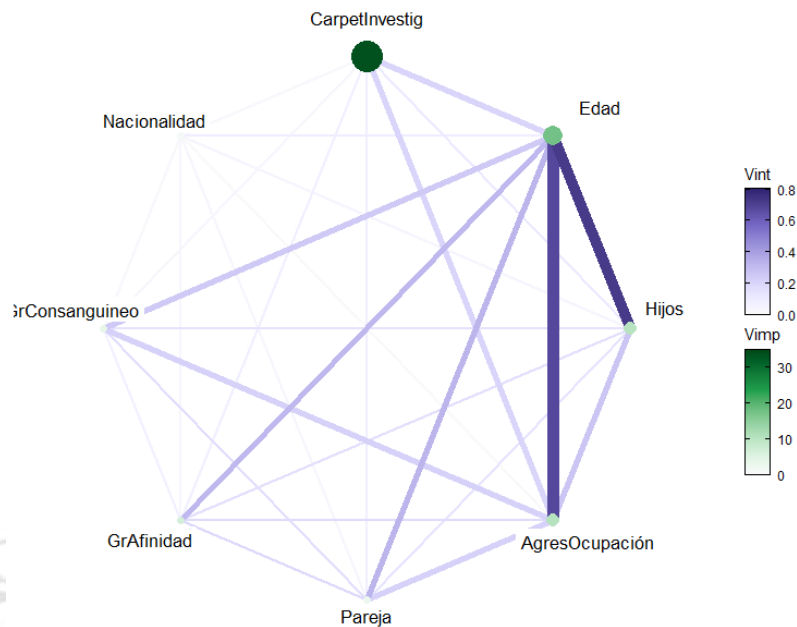


Figura 8.

184  
 185  
 186  
 187  
 188  
 189  
 190  
 191  
 192  
 193  
 194  
 195  
 196  
 197  
 198  
 199  
 200  
 201  
 202  
 203  
 204  
 205  
 206  
 207  
 208  
 209  
 210

En la figura (8) se confirma la importancia de las variables estatus de la carpeta de investigación, edad de la víctima, ocupación de la persona agresora, y número de hijos de la víctima como clasificadoras o predictoras principales, así como la estrecha interacción entre las tres últimas.

#### 4. Conclusiones

Los métodos supervisados de clasificación tienen la ventaja de que pueden incorporar como variables predictoras datos de tipo cuantitativo y de tipo categórico lo que permite la inclusión de un amplio conjunto de variables en el estudio de fenómenos sociales complejos, como es el caso de la clasificación de riesgos de feminicidio. Si bien la gran cantidad de datos ausentes significó la eliminación de una notable cantidad de registros de la base de datos original, con el subconjunto reducido que se obtuvo fue posible construir un modelo de clasificación óptimo con relación al riesgo de feminicidio con una exactitud de 89.57% y con una tasa de falsos negativos de 0%. Esto significa que para una mujer que recurre al programa de Abogadas de las Mujeres, la capacidad discriminadora del modelo permite decidir si, dadas las características particulares de una usuaria, esta se encuentra en riesgo alto de feminicidio. Es importante destacar que dicha clasificación es de carácter estadístico y como tal, únicamente debe utilizarse como un elemento de referencia que brinde a las instancias correspondientes un mayor número de técnicas en el estudio de este tipo de delitos.

211 **Agradecimientos**

212

213 Las autoras y autores agradecen el apoyo de la Secretaría de Posgrado e  
214 Investigación de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, a través del Programa de  
215 Apoyo a la Investigación para el Desarrollo y la Innovación, proyecto PAIDI/010/21,  
216 “Violencia contra las mujeres. Un estudio desde la ciencia de datos y la estadística  
217 espacial”.

218

219 **5. Índice de referencias**

220

- 221 • Código Penal Federal [CPF]. (1931). Artículo 325. Última reforma publicada  
222 DOF 12-11-2021. México. Disponible en  
223 [https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf\\_mov/Codigo\\_Penal\\_Federal.pdf](https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf_mov/Codigo_Penal_Federal.pdf)  
224 • García, J., Molina, J., Berlanga, A., Patricio, Á., Bustmante, L., & Padilla, W.  
225 (2018). *Ciencia de Datos. Técnicas Analíticas y Aprendizaje Estadístico*.  
226 México: Alfaomega.
- 227 • Gobierno de la Ciudad de México [GCDMX] (2019). Portal de Datos Abiertos.  
228 Atenciones de abogadas de las mujeres. [En línea]. Disponible en:  
229 <https://datos.cdmx.gob.mx/dataset/atenciones-abogadas-mujeres>
- 230 • Hernández, J., Ramírez, M. & Ferri, C. (2005). *Introducción a la Minería de*  
231 *Datos*. España: Pearson-Prentice-Hall.
- 232 • Instituto Nacional de Estadística y Geografía [INEGI]. Clasificación de  
233 parentescos. Disponible en  
234 [https://www.inegi.org.mx/contenidos/programas/mti/2013/doc/clasificacion\\_](https://www.inegi.org.mx/contenidos/programas/mti/2013/doc/clasificacion_parentescos.pdf)  
235 [parentescos.pdf](https://www.inegi.org.mx/contenidos/programas/mti/2013/doc/clasificacion_parentescos.pdf)
- 236 • Instituto Nacional de Estadística y Geografía [INEGI]. (2019). Sistema Nacional  
237 de Clasificación de Ocupaciones 2019: SINCO. Disponible en  
238 [https://www.snieg.mx/DocumentacionPortal/Normatividad/vigente/sinco\\_2019.](https://www.snieg.mx/DocumentacionPortal/Normatividad/vigente/sinco_2019.pdf)  
239 [pdf](https://www.snieg.mx/DocumentacionPortal/Normatividad/vigente/sinco_2019.pdf)
- 240 • Ley de Acceso de las Mujeres a una Vida Libre de Violencia de la Ciudad de  
241 México [LAMVLV] (2008). Última reforma publicada el 2 de septiembre de 2021.  
242 Disponible en  
243 [https://data.consejeria.cdmx.gob.mx/images/leyes/leyes/LEY\\_DE\\_ACCESO\\_D](https://data.consejeria.cdmx.gob.mx/images/leyes/leyes/LEY_DE_ACCESO_D)  
244 [E\\_LAS\\_MUJERES\\_A\\_UNA\\_VIDA\\_LIBRE\\_DE\\_VIOLENCIA\\_DE\\_LA\\_CDMX\\_7](https://data.consejeria.cdmx.gob.mx/images/leyes/leyes/LEY_DE_ACCESO_D)  
245 [.pdf](https://data.consejeria.cdmx.gob.mx/images/leyes/leyes/LEY_DE_ACCESO_D)
- 246 • Minguillón, J., Pujol, J. (2002). Árboles de decisión. En Universidad de Sevilla  
247 (Ed.). *Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica* (pp. 28-34). Santander:  
248 Alberto Márquez.
- 249 • Shannon, C. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *The Bell*  
250 *System Technical Journal* 27, 379–423, 623–656.

# ALGORITMOS EVOLUTIVOS: UNA APLICACIÓN EN MODELOS DE OPTIMIZACIÓN EN ECONOMÍA

Ulloa Arellano Víctor Manuel<sup>1,\*</sup>, Quijada Monroy Verónica<sup>2</sup> y García Cruz Kenya<sup>3</sup>  
<sup>1,2,3</sup> Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM. San Juan Totoltepec S/N,  
Santa Cruz Acatlán. Naucalpan Estado de México. C.P. 53150

AP- POSM015

## Resumen

Dentro del amplio campo de estudio de la economía se encuentra el problema de la apropiada asignación de recursos a efecto de minimizar costos o maximizar utilidades. Este tipo de problemas corresponden al área de optimización matemática. Para ello, se plantea una función objetivo que se pretende optimizar y que está sujeta a un conjunto de restricciones no necesariamente lineales. Para la optimización de dicha función es común atacar el problema a través de la optimización clásica, sin embargo, para determinadas funciones objetivos puede resultar complejo obtener la resolución a través de los métodos clásicos. Una alternativa es la aplicación de algoritmos evolutivos, ya que combinan estrategias de búsqueda tanto aleatoria como dirigida que le permite el acceso al total del espacio de búsqueda de forma eficiente y así obtener una aproximación a la solución razonablemente aceptable. En este trabajo se presenta un ejemplo de aplicación de algoritmos evolutivos en la optimización de una función objetivo relativa a un problema de economía.

**Palabras clave:** algoritmo, genético, evolutivo, optimización, funciones, economía.

## 1. Introducción

Actualmente la economía utiliza una amplia gama de métodos matemáticos como instrumento de investigación, particularmente aquellos orientados a problemas de asignación óptima de recursos para minimizar costos o maximizar utilidades. De forma general a estos problemas se les denomina problemas de optimización. Sydsaeter et al (2012) afirman que en general, los métodos matemáticos más importantes en aplicaciones a la economía son los que se formulan para resolver problemas de optimización, en la mayoría de los casos, para funciones de más de una variable. Chiang & Wainwright (2006) conceptualización a la economía como una ciencia de elección con base en criterios de minimización o maximización según el tipo de problema objeto de estudio. Para resolverlo, se requiere la definición de una función objetivo en donde la variable dependiente representa al objeto a optimizar y las variables independientes representan magnitudes económicas cuyos valores deben ser calculados a través de un procedimiento matemático. Hillier & Lieberman (2004) señalan que, en economía, la función objetivo es la mayoría de las veces no lineal. Esto implica que llegar a la solución del problema pueda llegar a ser complejo. En la economía, los métodos para optimizar funciones no lineales, se denominan métodos

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: [victormu@acatlan.unam.com](mailto:victormu@acatlan.unam.com) Tel. 56-23-16-83



43 clásicos. Martínez (2005) resume la importancia de conceptos tales como máximos y  
44 mínimos locales, puntos críticos y puntos silla como la base de los métodos de  
45 optimización. Por su parte Bernardello et al. (2004) enfatizan en los conceptos de  
46 conjuntos convexos y dentro de estos, los conceptos de extremos relativos. Ahora  
47 bien, ante funciones objetivo que dificultan o hacen imposible la aplicación de los  
48 métodos clásicos, es factible el uso de técnicas alternativas que obtengan una  
49 aproximación adecuada a la solución analítica del problema. Una de tales técnicas es  
50 la programación evolutiva, específicamente los algoritmos genéticos cuya estrategia  
51 les hace adecuados para la optimización matemática. En el presente trabajo se  
52 propone una función hipotética de costo con dos variables, la cual se minimiza primero  
53 con el método clásico y posteriormente se obtiene una aproximación a la solución con  
54 un algoritmo evolutivo. Finalmente se evalúa la calidad de la aproximación.

55

## 56 2. Desarrollo

57

### 58 2.1 Programación evolutiva

59 Araujo & Cervigón (2009), definen a los algoritmos evolutivos como una técnica para  
60 la resolución de problemas relativos a búsqueda y optimización. Su estrategia se basa  
61 en la teoría de la evolución de las especies, de Charles Darwin. Estos algoritmos  
62 trabajan con una población inicial que es un conjunto de soluciones candidatas  
63 denominadas individuos, para los cuales se calcula una medida de adaptación dada  
64 por su capacidad de ser solución al problema de optimización. A través de un proceso  
65 iterativo y con base en la medida de adaptación y mediante operadores que modifican  
66 la población actual (operadores genéticos de mutación y cruce), se obtienen nuevas  
67 poblaciones, llamadas generaciones, en las que los individuos más aptos sobreviven.  
68 Una de las ventajas de la programación evolutiva es que, gracias a su estrategia de  
69 combinar búsqueda aleatoria y búsqueda dirigida, es capaz de evitar caer en máximos  
70 o mínimos locales. Santana & Coello (2006) señalan que, para la implantación  
71 computacional de los algoritmos evolutivos, se requiere la representación en términos  
72 de estructuras de datos para cada individuo de la población; operadores que  
73 modifiquen a los individuos principalmente a través de cruce y mutación; una función  
74 de aptitud que mida qué tan buena es una solución con respecto a las otras y un  
75 mecanismo de selección que simule el principio de supervivencia del individuo más  
76 apto.

77

78

#### 79 2.1.1 Algoritmos genéticos

80

81 Michalewicz (1999) explica que los algoritmos genéticos son un caso particular de la  
82 programación evolutiva. Dentro de esta estrategia, se establece una población de  
83 individuos  $P(t) = \{x_1^t, \dots, x_n^t\}$  para la iteración  $t$ . Cada individuo representa una solución  
84 potencial al problema y se almacenan en una estructura de datos  $S$ . Cada solución  $x_i^t$   
85 se somete a evaluación para otorgarle una medida de aptitud. Entonces se obtiene  
86 una nueva generación (iteración  $t + 1$ ) por selección de los individuos más aptos de la

87 generación anterior. Algunos de los miembros de esta nueva generación son producto  
 88 de transformación de individuos de la generación anterior a través de operadores  
 89 genéticos que emulan la mutación de individuos  $m_i: S \rightarrow S$  y la cruce de individuos  
 90  $c_j: S \times \dots \times S \rightarrow S$ . De acuerdo a lo anterior, la estructura general de un algoritmo genético  
 91 viene dada por el siguiente pseudocódigo.

```

92 función algoritmo genético
93     {
94         t ← 0
95         inicializar P(t)
96         evaluar P(t)
97         mientras (condición de terminación = falso)
98             {
99                 t = t + 1
100                seleccionar P(t) desde P(t - 1)
101                modificar P(t)
102                evaluar P(t)
103            }
104     }
105
106
107
108
109
110
111
    
```

2.1.2 Minimización de una función de costos por el método clásico

108 Sea la función de costos  $f(x, y) = \frac{y}{1+x^2+y^2}$  para  $x \in [-5,5]$ ,  $y \in [-5,5]$ . La figura (1)  
 109 muestra la gráfica de la función en la que se advierten dos extremos relativos.  
 110  
 111

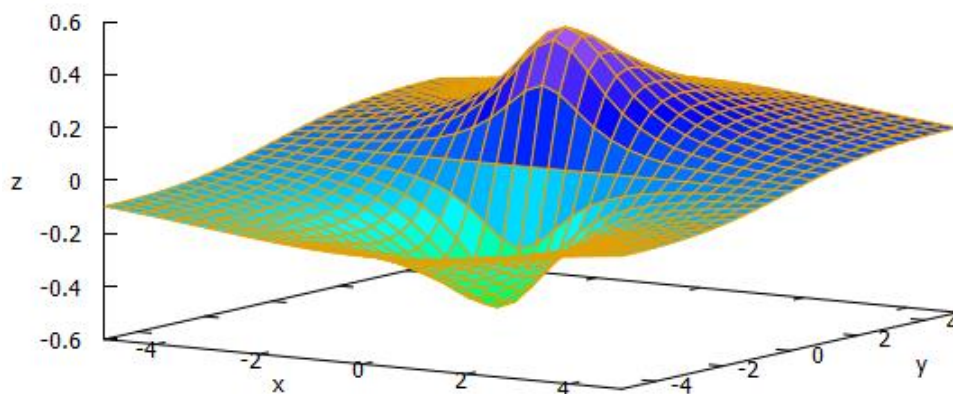


Figura 1. Gráfica de la función objetivo

112  
 113  
 114  
 115 Con las ecuaciones (1) y (2), se procede ahora a calcular los puntos críticos, con lo  
 116 que se obtienen los valores (0,1) y (0, -1).  
 117

118 **Ecuación 1.**  $f_1 = -\frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$

119

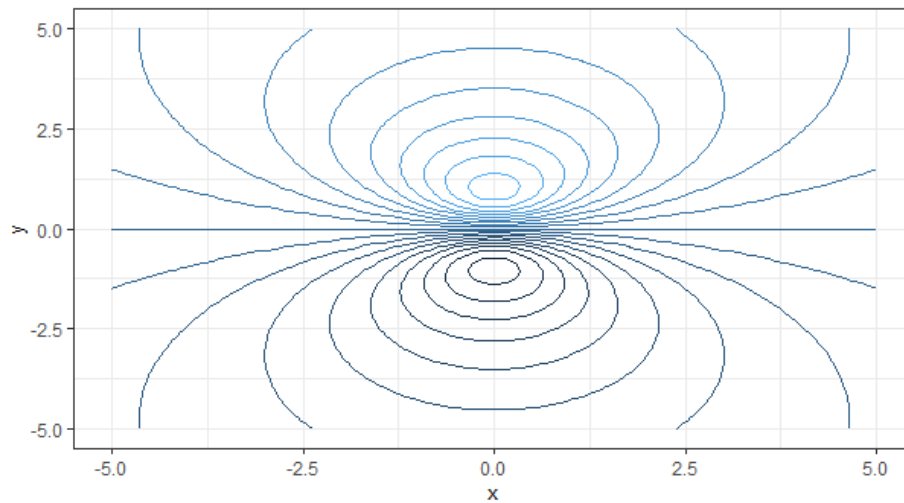
120

**Ecuación 2.**  $f_2 = -\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$

121

La figura (2) muestra las curvas de nivel de la función en donde se visualizan los puntos críticos correspondientes a los extremos relativos.

122



124

125

126

127

**Figura 2. Curvas de nivel de la función objetivo**

128

Con las ecuaciones (3), (4) y (5) se obtienen las componentes de la matriz hessiana que se muestra en la ecuación (6).

129

130

131

**Ecuación 3.**  $f_{11} = \frac{-2y(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$

132

133

**Ecuación 4.**  $f_{12} = f_{21} = \frac{-2x(1+x^2-3y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$

134

135

**Ecuación 5.**  $f_{22} = \frac{-2y(3+3x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$

136

137

**Ecuación 6.**  $H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-2y(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} & \frac{-2x(1+x^2-3y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} \\ \frac{-2x(1+x^2-3y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} & \frac{-2y(3+3x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^3} \end{pmatrix}$

138

139

Al evaluar el punto crítico (0, -1), se tiene que:

140

141 **Ecuación 7.**  $H(0, -1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

142 Dado que  $|H_1| = \frac{1}{2} > 0$  y además  $|H_2| = \frac{1}{4} > 0$  se tiene que el punto  $(0, -1)$  es un  
 143 mínimo local y por lo tanto  $f(0, -1) = -0.5$ .

144 Una vez que se ha obtenido la solución analítica, se obtiene ahora una aproximación  
 145 mediante un algoritmo genético implantado en lenguaje R, por Rodrigo (2019), con los  
 146 parámetros que se muestran en la tabla

**Tabla 1. Parámetros del algoritmo genético**

Parámetro	Valor
Función objetivo	$y/(1 + x^2 + y^2)$
Número de variables	2
Tipo de optimización	Minimizar
Región de búsqueda	$x \in [-5,5], y \in [-5,5]$
Individuos por generación	30
Máximo número de generaciones	500
Porcentaje de individuos más aptos que pasan a la siguiente generación	1%
Probabilidad de mutación	10%
Distribución de probabilidad	Uniforme
Método de selección	Torneo
Criterio de paro	$Error \leq 10^{-8}$

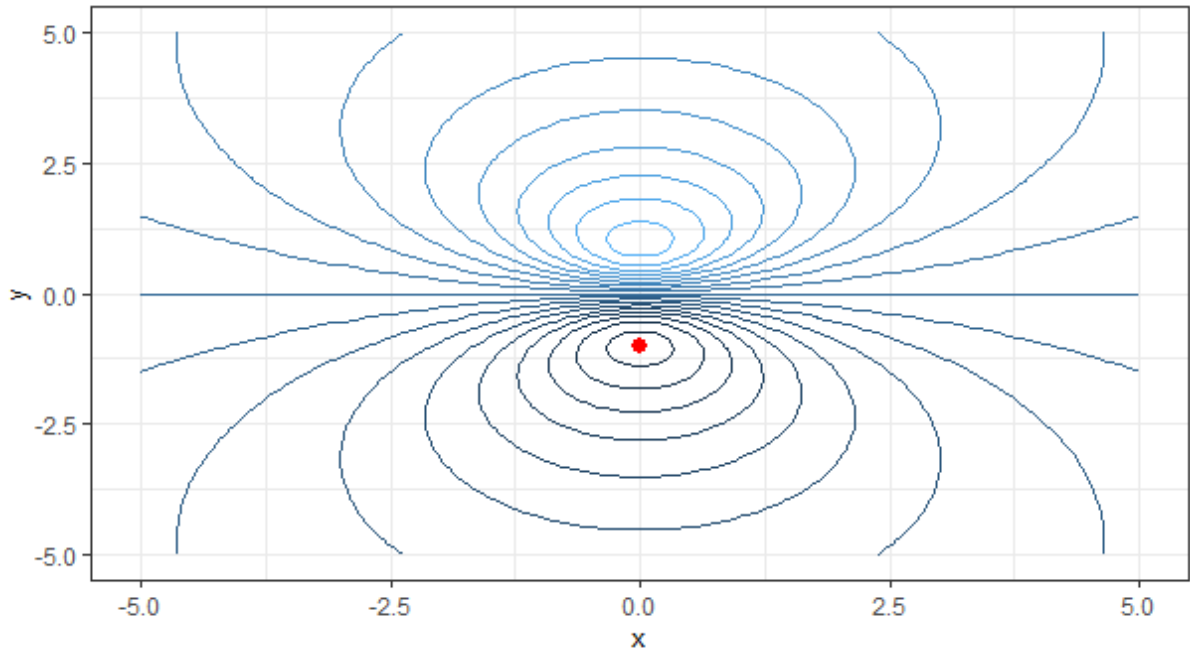
149  
 150 **3. Resultados y análisis**

151  
 152 La tabla (2) muestra los resultados obtenidos una vez ejecutado el algoritmo en el  
 153 entorno de trabajo de R studio.

**Tabla 2. Resultados del algoritmo genético**

Parámetro	Valor
Tiempo de cálculo	0.281594038009644 secs
Número de generaciones	29
Tipo de optimización	Minimizar
Óptimo calculado	-0.499999
Valor de variable $x$	0.001964558
Valor de variable $y$	-1.000584

156  
 157 En la figura (3) se observa en color rojo la ubicación de la solución encontrada por el  
 158 algoritmo genético, que corresponde al punto  $(0.001964558, -1.000584)$ , es decir,  
 159 prácticamente se ubica en el punto  $(0, -1)$ .

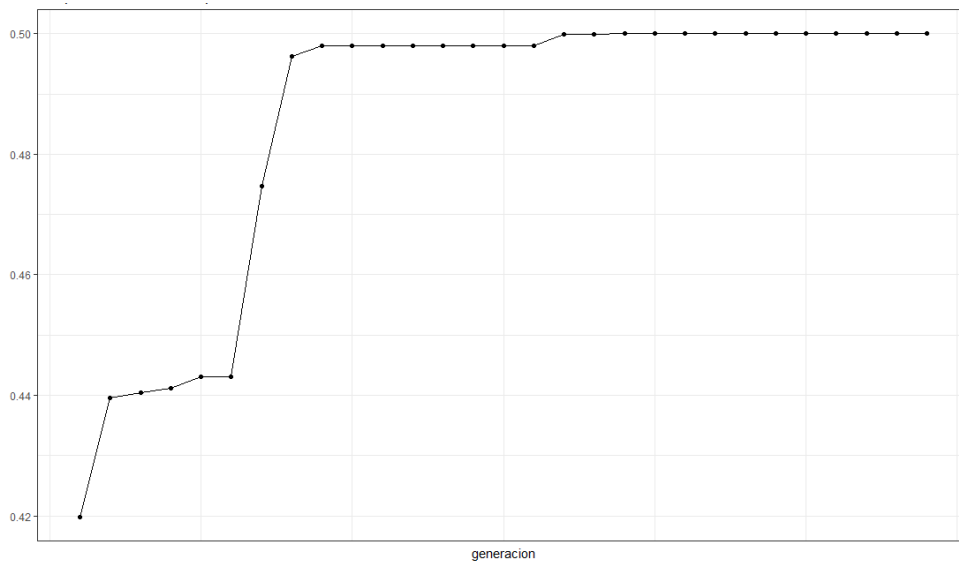


Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

**Figura 3. Ubicación del mínimo local**

160  
 161  
 162  
 163  
 164  
 165  
 166  
 167  
 168

Con relación al comportamiento de la aptitud de los individuos, se observa un comportamiento creciente que se estabiliza a partir de la generación 17. Ver figura (4).



**Figura 4. Aptitud del mejor individuo en cada generación**

169  
 170  
 171  
 172

**4. Conclusiones**

173

174 En economía, las funciones de costo o de utilidad se definen con dos o más variables  
175 lo que significa que su optimización requiere entre otros cálculos las derivadas  
176 parciales, resolución de ecuaciones no lineales y la obtención de la matriz hessiana.  
177 Lo anterior puede resultar muy difícil por los métodos clásicos, sin embargo, puede  
178 recurrirse a métodos computacionales tales como los algoritmos evolutivos que gracias  
179 al balance entre búsqueda aleatoria y búsqueda dirigida explotan de forma eficiente  
180 en el espacio de soluciones a efecto de obtener una aproximación lo suficientemente  
181 buena a la solución analítica. En el presente trabajo se planteó una función hipotética  
182 de costos en dos variables con el objeto de minimizarla. Con el método de optimización  
183 clásica se obtuvo la solución (0, -1, -0.5) y con el algoritmo genético una aproximación  
184 dada por (0.001964558, -1.000584, -0.499999). Se observa un error de casi dos  
185 milésimas para  $x$ , casi 6 diez milésimas para  $y$ , y de una centésima para  $f(x, y)$  con  
186 lo que el algoritmo genético arrojó una adecuada aproximación a la solución analítica.

187

### 188 **Agradecimientos**

189

190 Las autoras y autores agradecen el apoyo de la Secretaría de Posgrado e  
191 Investigación de la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, a través del Programa de  
192 Apoyo a la Investigación para el Desarrollo y la Innovación, proyecto PAIDI/010/21.

193

### 194 **5. Índice de referencias**

195

- 196 • Anthony, M.(2001). *Matemáticas para la economía y las finanzas: Una*  
197 *introducción*. Madrid: Cambridge University Press.
- 198 • Araujo, L., Cervigón, C. (2009), *Algoritmos evolutivos. Un enfoque*  
199 *práctico*. México: Alfaomega RA-Ma.
- 200 • Bernardello, A., Bianco, M. & Casparri, M. (2004). *Matemáticas para*  
201 *economistas con Excel y MATLAB*. Argentina: OMICRON.
- 202 • Chiang, A., & Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de*  
203 *economía matemática*. México: McGrawHill.
- 204 • Hillier, F. & Lieberman, G. (2004). *Investigación de Operaciones*.  
205 México: McGraw-Hill
- 206 • Martínez, F. (2005). *Introducción a las matemáticas para la economía*.  
207 Bilbao: Desclée de Brouwer.
- 208 • Michalewicz, Z. (1999). *Genetic Algorithms + Data Structure = Evolution*  
209 *Programs*. New York: Springer Verlag
- 210 • Rodrigo, J. (2019). Optimización con algoritmo genético y Nelder-Mead by  
211 Joaquín Amat Rodrigo. Obtenido en marzo de 2020 de la dirección:  
212 [https://www.cienciadedatos.net/documentos/48\\_optimizacion\\_con\\_algoritmo\\_g](https://www.cienciadedatos.net/documentos/48_optimizacion_con_algoritmo_genetico)  
213 [enetico](https://www.cienciadedatos.net/documentos/48_optimizacion_con_algoritmo_genetico).
- 214 • Santana Quintero, Luis Vicente, & Coello Coello, Carlos A. (2006). Una  
215 introducción a la computación evolutiva y alguna de sus aplicaciones

- 216 en Economía y Finanzas. Revista de Métodos Cuantitativos para la  
217 Economía y la Empresa, 2, ,3-26.  
218 [fecha de Consulta 9 de marzo de 2022].ISSN:Disponible en:  
219 <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=233117243001>  
220 • Sydsaeter, K., Hammond, P. & Carvajal, A. (2012). *Matemáticas para*  
221 *el análisis económico*. España: Pearson.

MEMORIAS DEL  
Congreso Internacional  
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

# 1 APLICACIÓN DE HABILIDADES DE ANÁLISIS NUMÉRICO 2 SOPORTADO POR UN SISTEMA EXPERTO: LAS JARRAS DE 3 POISSON 4

5 Rigaud Téllez Nelly<sup>1,\*</sup>, Blanco Bautista Roberto<sup>2</sup>

6 *Facultad de Estudios Superiores Aragón- UNAM. Av. Hacienda de Rancho Seco S/N,*  
7 *Impulsora Popular Avícola, 57130 Nezahualcóyotl, Méx.*  
8

9 AP-POSM016

## 10 Resumen

11 *Se propone el diseño y desarrollo de un sistema experto, basado en conceptos de Inteligencia Artificial*  
12 *para la evaluación de conocimiento matemático, en particular, la habilidad de aplicar aritmética en el*  
13 *análisis de estructuras, consecuentemente, en el proceso de resolución de un problema. El sistema*  
14 *experto se centra en encontrar las mejores formas de representar habilidades, experiencia y*  
15 *razonamiento humano, mediante matemáticas y en forma de software, aplicado al problema de “verter*  
16 *líquidos”, conocido también como “las jarras de Poisson”. El enfoque de investigación del Design*  
17 *Science Research (Investigación de la Ciencia del Diseño DSR) da soporte al diseño y construcción de*  
18 *artefactos para brindar una solución útil y efectiva a un problema no trivial, lo cual implica un ciclo de*  
19 *actividades de diseño-construcción-evaluación, que iteran tantas veces como sean necesarias antes*  
20 *que el artefacto sea finalmente validado y comunicado para su utilización. La innovación se basa en que*  
21 *el sistema experto se constituye de un algoritmo de búsqueda de enfoque general que permite resolver*  
22 *un patrón para cualquier cantidad de litros en tres jarras y cuyo enfoque educativo se ubica en asistir al*  
23 *usuario en la gestión del propio conocimiento matemático, en este sentido, el sistema experto actúa*  
24 *como un tutor automático que orienta en las decisiones de elección de llenado de jarras, mostrando*  
25 *trayectorias de un estado inicial a un estado final objetivo, lo cual explicita una estrategia de solución.*  
26 *El enfoque de innovación de procesos de aprendizaje puede beneficiar a los alumnos, en torno a*  
27 *mecanismos de una enseñanza creativa.*  
28

29 **Palabras clave:** *Inteligencia, artificial, sistema, experto, matemática, discreta.*  
30

## 31 1. Introducción

32

33 La necesidad de modernizar la educación de ingeniería en el contexto de la transición  
34 a una economía digital ha requerido en repensar esquemas diferentes de desarrollo  
35 de habilidades. En estos dos últimos años, el uso del internet y dispositivos digitales,  
36 pero también tecnologías emergentes, por ejemplo, los provenientes de la Inteligencia  
37 Artificial, han demostrado un potencial de crear un ambiente significativo de  
38 aprendizaje, desde resolver problemas, razonar, así como un medio de comunicación,  
39 e incluso pueden coadyuvar a generar relaciones y patrones.  
40

41 El reto se ha centrado en lograr una pedagogía efectiva, instrucción y soporte, a través  
42 de contenidos digitales (Curaj, Deca, & Procopie, 2020), especialmente, cuando un  
43 profesor o instructor desea personalizar la educación para ciertas actividades y  
44 aplicado a un gran número de usuarios o estudiantes en forma simultánea. Para hacer

---

1 \* Autor para la correspondencia. E-mail: nerigaud@unam.mx, 56231090



45 frente a este problema, un sistema experto para el desarrollo de habilidades del  
 46 pensamiento matemático se basa en la investigación y desarrollo de conceptos  
 47 didácticos generales, para definir relaciones entre los niveles de corrección de  
 48 respuestas y nivel de desarrollo de la habilidad que se desee mejorar.

49

50 El objetivo es diseñar e implementar un sistema experto, basado en conceptos de  
 51 Inteligencia Artificial para la evaluación de conocimiento matemático, en particular, la  
 52 habilidad de aplicar aritmética en el análisis de estructuras, consecuentemente, en el  
 53 proceso de resolución de un problema.

54

55 Lo anterior, se puede interpretar como la formulación de todos los estados de dominio  
 56 y un conjunto de reglas que cambian de un estado a otro, y que se representan como  
 57 nodos y operadores. De ahí que, un problema orientado a favorecer habilidades de  
 58 razonamiento se ha resuelto, cuando se ha encontrado una trayectoria de un estado  
 59 inicial a un estado final objetivo, y la estrategia de solución es explícita para el usuario.

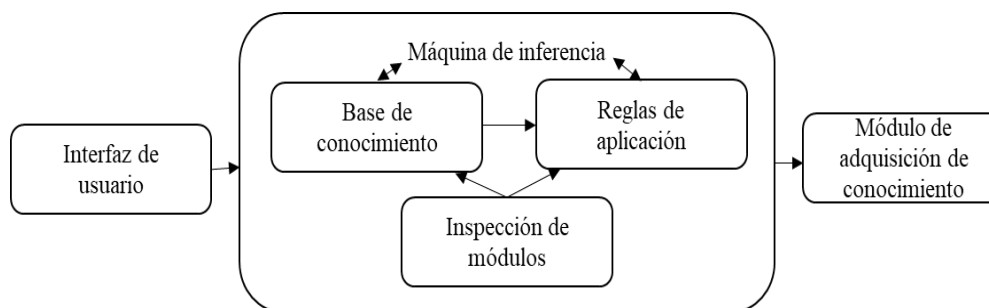
60

61 Este enfoque innovativo se soporta en la investigación y desarrollo de sistemas de  
 62 aprendizaje adaptativos, basados en comportamientos de estudiantes, para lo cual el  
 63 sistema experto se puede diseñar en reglas o en árboles.

64

65 Otro aspecto que se debe tomar en cuenta son sus componentes fundamentales (Rich  
 66 & Knight, 1991), como la arquitectura diseñada expofeso para este caso, que se  
 67 muestra a continuación.

68



69

70 **Figura 1. Arquitectura propuesta para el sistema experto (Elaboración propia)**

71

72 La figura 1, muestra la relación que existe entra cada componente. La interfaz de  
 73 usuario (1), es el enlace entre el sistema experto y el usuario, permite que el usuario  
 74 se le presente un problema. La máquina de inferencia (2) implementa un método de  
 75 solución de problemas que manipula el conocimiento almacenado en la base de  
 76 conocimientos, las informaciones sobre los estados iniciales y los estados actuales de  
 77 la solución del problema. Lo anterior se refiere, a que conduce al usuario en su proceso  
 78 de razonamiento apoyado en su estrategia.

79

80 La base de conocimientos (3) contiene el conocimiento especializado extraído del  
 81 experto en el dominio. Las reglas para la aplicación de la base de conocimiento (4)  
 82 están diseñadas para aclarar al usuario la línea de razonamiento seguida en el proceso

83 de inferencia. El componente inspección de módulos (5) permite que se puedan añadir,  
 84 eliminar o modificar elementos de conocimiento en el sistema experto, así como  
 85 efectuar el mantenimiento sobre las reglas de aplicación de la base de conocimiento.  
 86 Además, genera la relación entre la base de conocimiento y sus reglas de aplicación.

87  
 88 El módulo de adquisición del conocimiento (6) almacena datos recibidos inicialmente  
 89 para la resolución de un problema. Contiene conocimiento sobre el caso concreto en  
 90 que se trabaja. También se registran las conclusiones intermedias y finales, así como  
 91 los datos generados en el proceso de inferencia. Al almacenar los resultados  
 92 intermedios, conserva el vestigio de los razonamientos efectuados; por lo tanto, se  
 93 puede utilizar para explicar las deducciones y el comportamiento del sistema.

94

## 95 2. Metodología y desarrollo

96

### 97 2.1 Estructura de la investigación

98 La Investigación de la Ciencia de Diseño (DSR) es un paradigma de investigación en  
 99 el que un diseñador/ programador responde preguntas relevantes a los problemas  
 100 humanos, a través de la creación de artefactos innovadores, en este caso, un sistema  
 101 experto, que contribuye con nuevos conocimientos al cuerpo de evidencia científica.

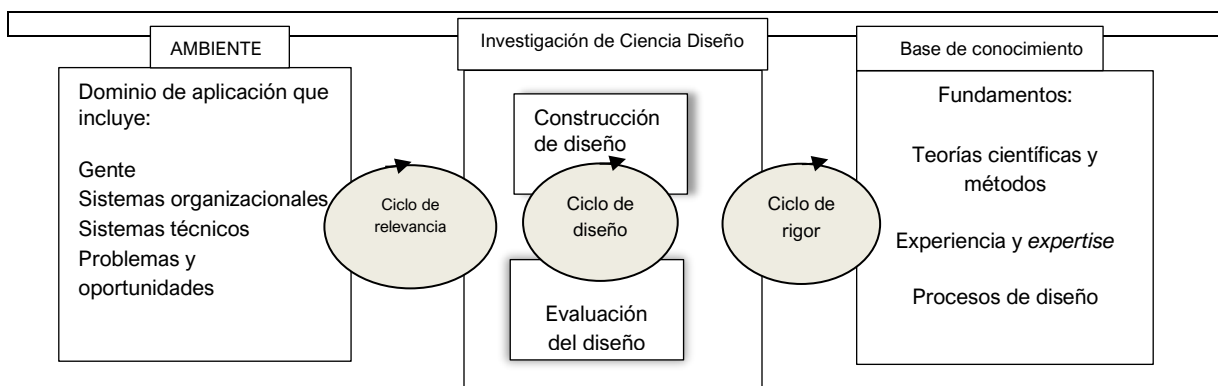
102

103 El principio fundamental de la DSR es que el conocimiento y la comprensión de un  
 104 problema de diseño y su solución se adquieren en la construcción, aplicación y análisis  
 105 de un artefacto o del desarrollo tecnológico. El término “artefacto” es fundamental para  
 106 el diseño de investigación científica y es construido por humanos.

107

108 En la figura 2, se presenta el método que soporta al sistema experto (Dresch, Pacheco-  
 109 Lacerda, & J.A., 2015).

110



111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

Figura 2. Estructura de la metodología DSR (Dresch, Pacheco-Lacerda, & J.A., 2015)

123

124

125

126

## 127 2.2 Desarrollo de la metodología DSR

128

129 **Ciclo de relevancia-** El programa está diseñado aplicando conceptos de IA, e intenta  
130 servir como sistema experto aplicado a la toma de decisiones. El programa se  
131 compone de una base de conocimiento, consistente en los movimientos requeridos y  
132 diseñado por reglas.

133

134 El programa genera los tamaños de las jarras de Poisson y además genera el volumen  
135 de líquido que debe contener la jarra grande. Como sistema experto entrenador debe  
136 tener un límite de movimientos, de tal forma que, si con esos movimientos no se logra  
137 el objetivo, entonces el programa detiene el proceso y permite consultar la solución.

138 Para tres baldes, en movimientos óptimos, de cualquier capacidad, se requieren como  
139 mínimo 9 movimientos.

140

141 El enfoque de sistema experto consiste en que, si el usuario hace un movimiento no  
142 permitido, el sistema analiza la decisión tomada por el usuario, y se genera una  
143 leyenda de advertencia y bloquea al usuario para no seguir adelante.

144

145 El sistema experto le permite experimentar al usuario, a pesar de que este siga una  
146 estrategia incorrecta, solo analiza si el movimiento es válido o no.

147

148 **Ciclo de diseño-** Las matemáticas que soportan al sistema experto corresponden a la  
149 representación del conocimiento, en particular su formulación y ordenamiento bajo  
150 lógica y razonamientos de reglas.

151

152 Una regla consiste en una parte SI, y otra parte, ENTONCES (también llamada como  
153 una condición y una acción).

154

155 Las relaciones lógica- matemáticas están representadas por razonamientos. En caso  
156 de contar con un SI, implica que la regla se ha satisfecho, así que procede la cláusula  
157 ENTONCES, lo cual permite realizar una acción.

158

159 En los sistemas expertos en que el conocimiento se representa en forma de regla se  
160 llaman: sistemas basados en reglas. El programa consta de un módulo principal y tres  
161 submódulos que son “JUGAR”, “BASE DE CONOCIMIENTO” y “SOLUCIÓN”.

162

163 Hay que notar que el submódulo solución actúa solo en caso en que el usuario no  
164 llegue a la solución correcta.

165

166 La “base de conocimiento” del sistema consta de 18 movimientos asociados a una  
167 toma de decisión para llegar al éxito. Cada movimiento requiere ser programado, por  
168 ejemplo, uno de ellos es el movimiento 1. “Llenar el líquido en balde grande” (Figura  
169 3).

170

171

```
Ban=0
If nuint ≤ nutot →
    If bal ≤ capacidad
        Actualiza número de intento
        Avisa la restricción para esta decisión
        Mapeo de cantidad de líquido
        Print nutot
        Print etiquetas del estado del sistema
        Actualiza registro de decisión
    else,
        Print "El balde está lleno"
        Actualiza el estado de los baldes
    fin
else
    Print "Intentos agotados"
    Ban=1
Fin
```

Figura 3. Módulo de base de conocimiento (elaboración propia)

172

173

174

**Ciclo de rigor-** En este módulo se presenta la ruta para obtener la solución del problema. Se debe recordar que este módulo se presenta solo si el usuario no llegó al resultado con éxito.

176

177

178

Se presenta la base de conocimiento y como resultado, se aparece la secuencia de decisiones mostrando el número de intentos, la acción correspondiente mostrada con el número de decisión y el resultado de dicha decisión en forma de una tríada de números que indican la cantidad de líquido en balde grande, balde chico y balde median.

182

183

184

Se visualiza la cantidad de líquido en cada balde hasta llegar a la solución solicitada. El sistema favorece la experiencia de aprendizaje, al mostrar tríadas de decisión que forman una trayectoria lógica (planteamiento numérico de solución) y que sirven como patrón para acceder a la solución de ese juego, lo cual constituye el entrenamiento en lógica y toma de decisiones.

188

189

190

El sistema experto ofrece al usuario la oportunidad de desarrollar la habilidad de análisis, a través de la conjunción de la base de conocimiento, la visualización gráfica de los baldes y las tríadas de decisión o el planteamiento numérico del proceso de solución.

192

193

194

### 3. Resultados y análisis

196

197

El programa se realizó en visual basic y consta de un módulo principal y tres submódulos "jugar", "base de conocimiento" y "solución".

199

200

El módulo principal se encarga de relacionar los tres submódulos del sistema, al que se le ha llamado "tres baldes" (Figura 4).

201

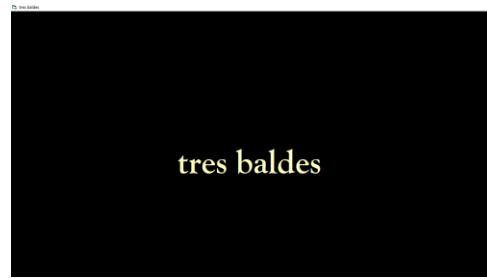


Figura 4. Interfaz de presentación del sistema experto (elaboración propia)

202  
 203  
 204  
 205  
 206  
 207  
 208

En la Figura 5, el planteamiento gráfico se modifica con base en las capacidades aleatorias de los tres baldes, en este sentido la visualización de volúmenes cambia en cada planteamiento del problema.

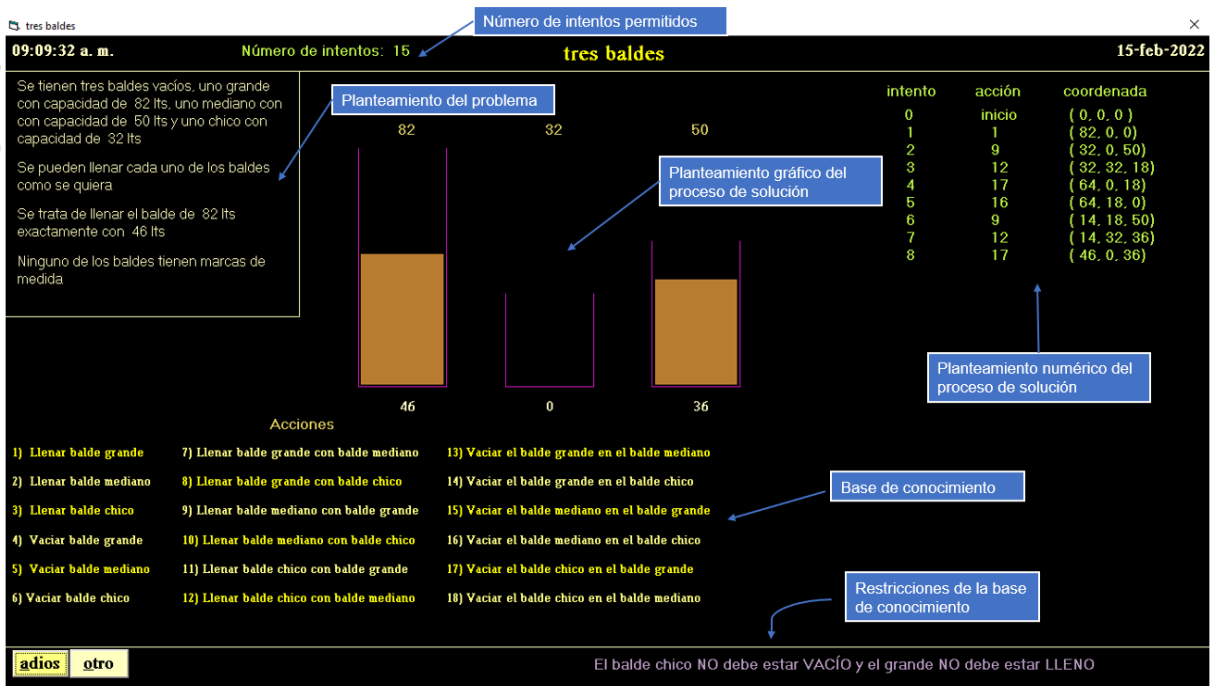


Figura 5. Interfaz completa del juego

209  
 210  
 211  
 212  
 213  
 214  
 215  
 216  
 217  
 218  
 219  
 220  
 221

Asimismo, en la Figura 5. la base de conocimiento es explícita para el usuario, quién puede observar que el sistema experto está construido sobre la base de 18 reglas. En un juego óptimo se tendrán 9 movimientos, sin embargo, el sistema permite hasta 15 movimientos, en los cuales el usuario puede generar sus estrategias de verter líquidos de forma independiente.

El planteamiento numérico de solución representa las acciones que realiza el usuario, tanto por número de acción, como por coordenadas (balde1, balde 2, balde 3). El usuario requiere hacer una representación mental que relaciona las cantidades de líquido para cumplir con los objetivos.

222  
 223  
 224  
 225  
 226

En la figura 6, si el usuario ha respetado todas las restricciones indicadas por la base de conocimiento, sobre lo que el sistema analiza como movimientos válidos, así como se logra el objetivo, le indicará al usuario que ha concluido exitosamente.

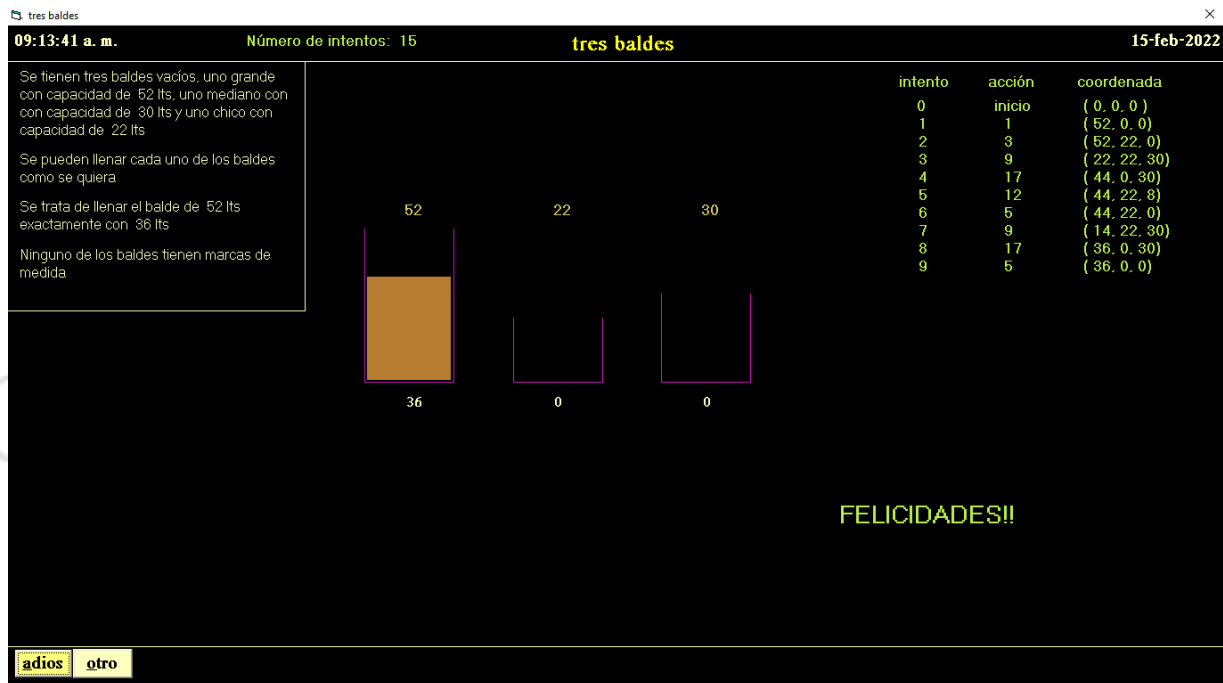


Figura 6. Finalización exitosa del juego

227  
 228  
 229  
 230  
 231  
 232  
 233  
 234  
 235  
 236  
 237  
 238  
 239  
 240  
 241  
 242  
 243  
 244  
 245  
 246  
 247  
 248

En la Figura 6, la persona ha realizado un análisis y ha aplicado las matemáticas en forma de encadenamientos de las reglas de SI -ENTONCES (IF-THEN) para formar una línea de razonamiento. Cuando el usuario realiza encadenamientos y se mueve hacia una cierta conclusión correcta, implicó que las estrategias que ha empleado son adecuadas a ese caso.

Cuando las estrategias seguidas por el usuario no conducen al éxito, el sistema experto detiene el procedimiento y procede a mostrar la solución paso a paso, en el proceso de solución.

Es importante mencionar que debido a la aleatoriedad de las jarras existen tantas posibles combinaciones que se puedan generar, para este sistema hasta 100 litros.

#### 4. Conclusiones

Las matemáticas discretas, en su forma de razonamientos lógicos han sido fundamentales para el diseño del presente sistema experto, ya que permiten estudiar conjuntos finitos o infinitos numerables para realizar procesos finitos de solución en las jarras de Poisson.

249

250 Asimismo, la metodología DSR ha demostrado su utilidad para orientar en la solución  
251 de problemas de la vida real, por tal motivo se puede decir que su aportación radica  
252 en la mejora de la experiencia de aprendizaje.

253

## 254 **Agradecimientos**

255

256 Este artículo ha sido posible gracias al apoyo recibido de la Dirección de Asuntos del  
257 Personal Académico, DGPA-UNAM, a través del Proyecto PAPIME PE104221.

258

259

## 260 **5. Índice de referencias**

261 Curaj, A., Deca, L., & Procopie, R. (2020). *European Higher Education Area*

262 *Challenges for a New Decade*. Berlin: Springer.

263 Dresch, A., Pacheco-Lacerda, D., & J.A., V.-A. (2015). *Design Science Research. A*

264 *Method for Science and Technology Advancement*. Switzerland: Springer

265 International Publishing.

266 Rich, E., & Knight, K. (1991). *Artificial Intelligence*. Singapore: McGraw- Hill.

# 1 TAREAS DE APRENDIZAJE DE MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA 2 LA ED DE LA LEY DE NEWTON

3  
4 Santana Sánchez Yuliana<sup>\*1</sup>, Beltrán Cantera Nadia<sup>2</sup>, Campos Nava Marcos<sup>3</sup> y Torres  
5 Rodríguez Agustín Alfredo<sup>4</sup>

6 <sup>1</sup>*División de Procesos Industriales, Universidad Tecnológica de Tecámac. Carretera*  
7 *federal México-Pachuca km- 37.5 Col. Sierra hermosa, CP 55740, Tecámac, Méx.*

8 <sup>2</sup>*Universidad Tecnológica Minera de Zimapán. Río Grande No. 34, col. Plutarco Elías*  
9 *Calles, CP 42344, Zimapán, Hgo.*

10 <sup>3</sup>*Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de*  
11 *Hidalgo. Carr. Pachuca- Tulancingo s/n Col. Carboneras, CP 42184.*

12 <sup>4</sup>*Tecnológico Nacional de México campus Atitalaquia. Av. Tecnológico N.9, Col.*  
13 *Tezoquipa, Atitalaquia, Hgo.C.P. 42970.*

14  
15 IP-POSM017

## 16 Congreso Internacional

### 17 Resumen

18 *En este trabajo se presenta una propuesta de diseño de tareas de aprendizaje matemático que*  
19 *ayuden a los estudiantes en su proceso de modelación de aplicaciones de una Ecuación Diferencial*  
20 *ordinaria (EDO), concretamente sobre la Ley de Enfriamiento de Newton en un contexto experimental*  
21 *y con el uso de herramientas digitales para la enseñanza. Se busca identificar el papel que juegan la*  
22 *experimentación, el uso de la tecnología y la interacción entre estudiantes y el docente en el proceso*  
23 *de modelación. Para el diseño de la tarea se consideraron elementos de la Modelación Matemática,*  
24 *del Enfoque de Resolución de Problemas y la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, así*  
25 *como de la matemática realista de Freudenthal como guías fundamentales para la estructuración de la*  
26 *misma. Como resultado se obtuvo una secuencia didáctica que consideramos permite alcanzar el*  
27 *objetivo de enseñanza, que consistió en lograr una mayor comprensión del concepto de derivada en*  
28 *sus diferentes significados, así como su uso para la modelación de la ED de la Ley de Enfriamiento de*  
29 *Newton. La tarea está pensada para aplicarse con un grupo de estudiantes del curso de matemáticas*  
30 *aplicadas a la ingeniería de una institución de educación superior tecnológica.*

31  
32 **Palabras clave:** *Modelación Matemática, EDO, Ley de Newton.*

### 33

### 34 1. Introducción

35 Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) están consideradas como uno de los  
36 tópicos básicos en la formación de profesionales de especialidades relacionadas con  
37 la ciencia y la tecnología, tal y como se refleja en diversos currículos del nivel  
38 universitario, por ejemplo en las licenciaturas o los grados en Matemáticas, Física,  
39 Química, Biología, Económicas, etc. La razón de su importancia es porque las  
40 ecuaciones diferenciales permiten describir fenómenos de variación y por tanto  
41 resultan de utilidad para modelizar, analizar y resolver numerosos problemas que  
42 surgen en diferentes contextos. Una de las problemáticas presentes en la enseñanza  
43 de las matemáticas se relaciona precisamente con la poca comprensión o

---

<sup>1</sup> Autor para la correspondencia. E-mail: [yuli\\_cms@hotmail.com](mailto:yuli_cms@hotmail.com)



44 entendimiento acerca de varios conceptos e ideas presentes cuando se abordan los  
45 contenidos referentes a las ecuaciones diferenciales.

46

## 47 **2. Referentes teóricos**

48 Los referentes considerados en este trabajo son la modelización matemática, el  
49 empleo de herramientas digitales para la enseñanza, así como la aproximación o  
50 enfoque de resolución de problemas, el diseño de tareas de aprendizaje (TAM), la  
51 Teoría de la Educación Matemática Realista de Freudenthal y la teoría de  
52 representaciones semióticas de Duval.

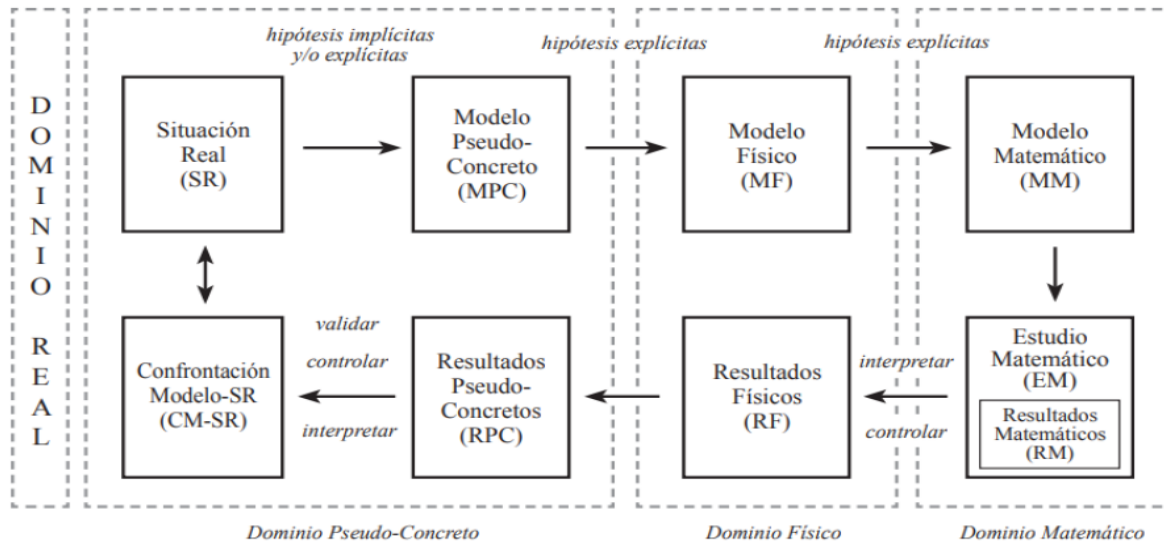
53

54 En torno al enfoque de resolución de problemas y el diseño de tareas de aprendizaje  
55 matemático –TAM- (Campos y Torres, 2018), diversas investigaciones han  
56 identificado su potencial para el desarrollo de los procesos de reflexión en los  
57 estudiantes, y la adquisición de un modo de *pensar matemático* (Torres, Campos,  
58 Reyes y Soto, 2022; Santos-Trigo, 2020; Barrera y Reyes, 2019); esto es, que la  
59 perspectiva de resolución de problemas considera que las tareas no rutinarias  
60 pueden favorecer en los estudiantes formas de pensamiento análogas a las que  
61 desarrolla un matemático durante su ejercicio profesional (Nieves, Carballo y  
62 Fernández, 2019). Para que una TAM pueda conseguir estas bondades, requiere  
63 incluir las siguientes características: permitir a los estudiantes explorar distintas rutas  
64 de solución, encontrar relaciones entre datos o incógnitas, presentarles distintos  
65 registros de representación, analizar casos particulares, formular y validar conjeturas  
66 y comunicar resultados.

67

68 Por su parte, los procesos de modelación matemática pueden empatarse muy bien  
69 con la aproximación de resolución de problemas, pues favorece que los estudiantes  
70 aprendan conceptos e ideas matemáticas. Para mostrar gráficamente el proceso de  
71 la modelación matemática, se presenta el siguiente esquema (Figura 1) realizado por  
72 Rodríguez y Quiroz (2016), que nos muestra la naturaleza cíclica de los procesos  
73 implicados:

74



**Figura 1. Ciclo de modelación de Rodríguez y Quiroz (2016).**

Un objetivo importante que se pretende con la modelización matemática es contribuir a la comprensión de fenómenos reales; en este sentido, Korsunsky (2002) ha sugerido que los problemas matemáticos en contexto se apeguen a la situación real, esto es, resulta deseable que la situación que le sea presentada al estudiante en el aula sí tenga su punto de partida en una situación real que puede tener su origen en una disciplina distinta de las matemáticas. Esta idea resulta central para la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal (1991), que enfatiza que las matemáticas se comprenden mejor dentro de un contexto real.

Desde este punto de vista, los autores de esta contribución consideramos acertada la elección de la Ley de enfriamiento de Newton como un buen ejemplo para modelizar un fenómeno en el aula de clase, al observar que el único conocimiento extra-matemático requerido es de dominio público, y se refiere a la experiencia cotidiana de que una sustancia que se enfría paulatinamente, en algún momento alcanzará la temperatura de su medio ambiente.

En torno al empleo de herramientas digitales para la enseñanza, se considera hoy en día que su uso resulta indispensable para la adquisición y reforzamiento de conceptos matemáticos. Como lo sugieren Campos y Torres (2018), en las últimas dos décadas se han realizado diversos estudios sobre el uso y las potencialidades de las herramientas digitales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; como ejemplos de las estrategias que se han desarrollado se puede consultar el trabajo de Santos-Trigo (2001), donde se hace una revisión de la relación tan estrecha que puede conseguirse entre las representaciones gráficas y las algebraicas haciendo uso de un sistema de geometría dinámico (SGD).

El otro referente teórico considerado en esta propuesta es el concerniente a la utilización de distintos registros de representaciones semióticas de los objetos matemá-

105 ticos. Para Duval (2006) en el estudio de las transformaciones de dichas representa-  
106 ciones semióticas, resulta importante considerar que cuando se une un enunciado  
107 con una representación visual se pueden desarrollar dos funciones: una economía de  
108 memoria para tener en cuenta todos los elementos que se relacionan, y una heurísti-  
109 ca para encontrar tales relaciones. En este sentido, las herramientas digitales pue-  
110 den facilitar la unión de este enunciado y su representación visual, contribuyendo a  
111 una mayor comprensión del objeto. El otro aspecto relevante se relaciona con la ha-  
112 bilidad para cambiar de un registro de representación a otro, de forma que se privile-  
113 gie la adquisición del conocimiento. En el caso de las matemáticas, se ha identificado  
114 la importancia de promover el tránsito entre los distintos registros de representación  
115 semiótica del objeto matemático: numérico, algebraico, tabular, gráfico, ente otros.

116

### 117 **3. Metodología o desarrollo**

118

119 Se utilizó el enfoque cualitativo de la investigación, así como la técnica de  
120 investigación documental para poder estructurar el diseño de una tarea de  
121 aprendizaje matemático (TAM), que tomará en consideración los distintos elementos  
122 identificados en la consulta de los referentes teóricos implicados. Se obtuvo una  
123 tarea conformada por una secuencia de 3 actividades principales.

124 Una actividad preliminar, que tiene el propósito de indagar acerca de los  
125 conocimientos previos de los estudiantes. Posteriormente en la segunda actividad se  
126 buscó coleccionar un conjunto de datos reales, para poder representar los valores  
127 exactos de la disminución paulatina de temperatura de un líquido caliente que se  
128 ponía a enfriar al medio ambiente. En la tercera actividad, se realizó la propuesta  
129 para el procedimiento de modelación guiado por el profesor con el grupo de  
130 estudiantes. A continuación se presenta un esquema general de las 3 actividades  
131 consecutivas que conforman la TAM (ver Figura 2).

132

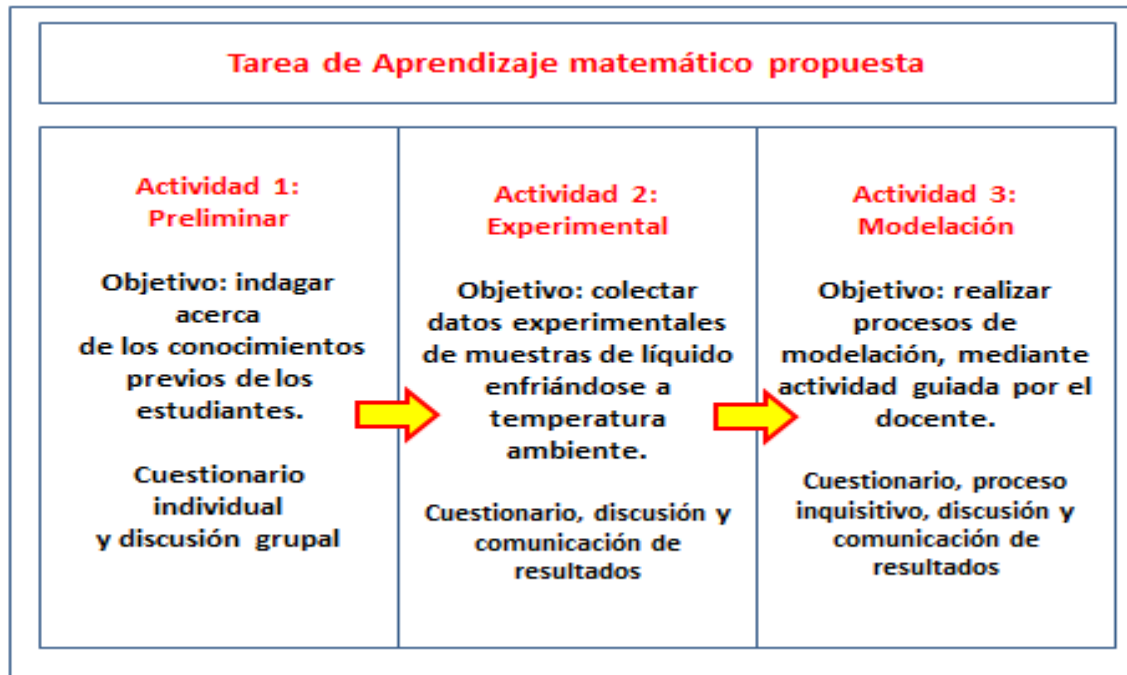


Figura 2. Esquema general de la TAM.

133

134

135

136 En este sentido, cabe señalar que la TAM se pensó para un grupo de estudiantes de  
 137 ingeniería en octavo semestre, que cursan la asignatura de *matemáticas aplicadas a*  
 138 *la ingeniería*, de una institución pública de educación superior. Como antecedente,  
 139 los estudiantes habían llevado previamente cursos de funciones matemáticas,  
 140 cálculo diferencial e integral.

141

142 Algunas de las actividades se pensaron para desarrollarse en equipos, para  
 143 promover la interacción entre estudiantes con sus compañeros, propio de uno de los  
 144 principios de la matemática realista (EMR), como se expresa en la sección de  
 145 referentes. También se consideró que la segunda actividad se realizará en el  
 146 laboratorio de Física debido a la necesidad de utilizar aparatos de medición, así  
 147 como de un espacio con las condiciones suficientes para llevar a cabo la  
 148 experimentación.

149

#### 150 4. Resultados y análisis

151

152 Como resultado se obtuvieron los siguientes elementos que conforman la tarea:  
 153 enunciado del problema, instrucciones, cuestionarios para los estudiantes, hoja-guía  
 154 de las actividades a desarrollar, entre otros. A continuación se muestran unas tablas  
 155 con los elementos considerados para las 3 actividades incluidas en la secuencia de  
 156 la TAM. Primeramente, para la actividad 1, referente a la actividad preliminar  
 157 diseñada, se muestra a continuación un esquema general de su estructura (Figura  
 158 3).



Figura 3. Estructura de la actividad preliminar.

160  
 161  
 162  
 163  
 164  
 165  
 166  
 167  
 168  
 169  
 170  
 171  
 172  
 173

La idea central de esta actividad es no sólo indagar acerca de las concepciones previas de los estudiantes, acerca de los fenómenos de calentamiento y enfriamiento de los objetos cuando se colocan en contacto con el medio ambiente, sino también sobre sus interpretaciones de los comportamientos gráficos de la variación de temperatura para algunas situaciones comunes. Se incluyen asimismo preguntas sobre situaciones hipotéticas alrededor del calentamiento y enfriamiento de líquidos, con la finalidad de indagar sus ideas y explicaciones ante dichos fenómenos, asimismo identificar algunos errores conceptuales presentes. A continuación (Figuras 4 y 5) se muestran mayores detalles de las actividades 2 y 3 que se enlistaron en la Figura 3.

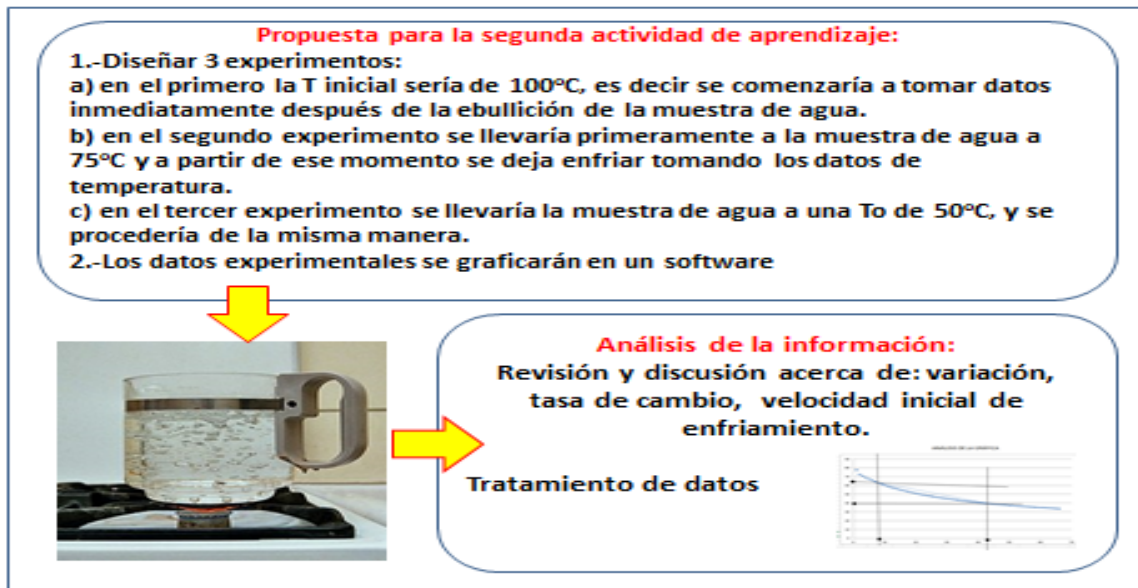


Figura 4. Descripción de la actividad 2 (experimental).

174  
 175  
 176

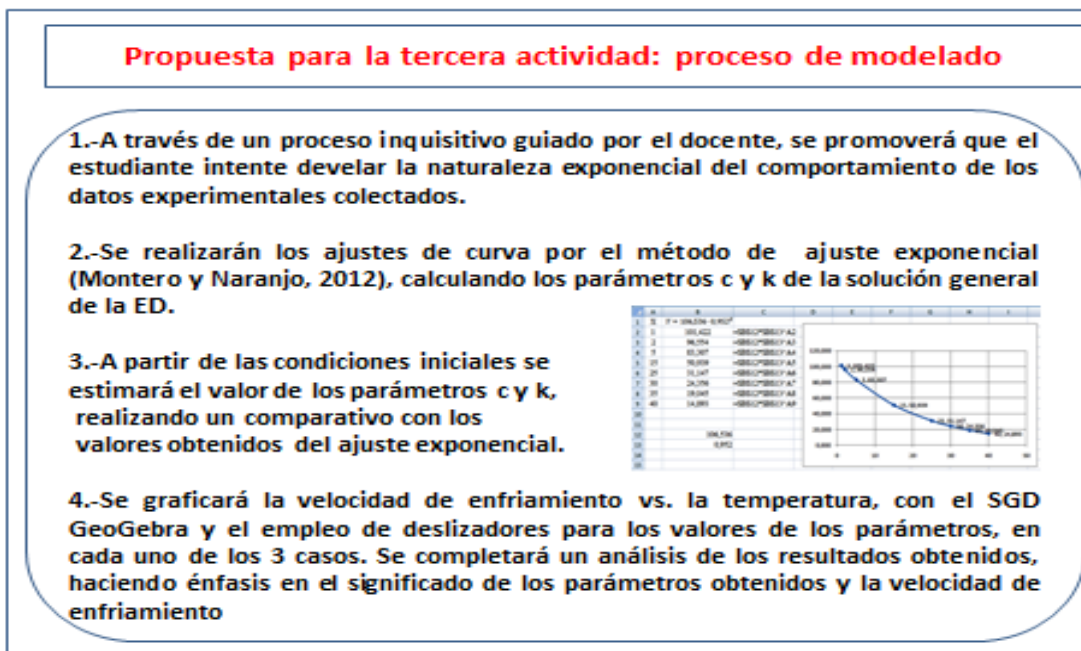


Figura 5. Descripción de la actividad 3 (proceso de modelado).

177  
 178  
 179

180 La segunda actividad (ver Figura 4) tiene como propósito recuperar varias nociones  
 181 referentes al concepto de derivada: como una razón de cambio, la co-variación entre  
 182 2 variables, en este caso la temperatura versus el tiempo, también la forma de  
 183 estimar la velocidad del cambio de temperatura, comparando dicho parámetro en  
 184 diferentes momentos del proceso. Para poder completar esta segunda fase, se

185 propone transitar entre los registros tabular, gráfico y algebraico, para que el  
186 estudiante pueda comprender todos estos significados. Haciendo igualmente un  
187 comparativo de las 3 variaciones propuestas para el experimento.

188

189 Para la tercera actividad, que ocupa propiamente el proceso de modelación (ver  
190 Figura 5), se basa en los principios del enfoque de resolución de problemas, en una  
191 actividad dónde las acciones del profesor resultan relevantes, haciendo énfasis en un  
192 proceso inquisitivo para detonar la exploración de la forma en cómo ocurre la  
193 variación de la temperatura por parte del estudiante. Se requiere guiarlo en el  
194 proceso de modelación, expresado mediante distintas representaciones semióticas,  
195 con la finalidad de favorecer la construcción de conexiones útiles, para entender y  
196 dar sentido al fenómeno de enfriamiento de un cuerpo mediante una ecuación  
197 diferencial. En esta última fase o actividad, es importante lograr que se contrasten las  
198 hipótesis discutidas acerca de la naturaleza exponencial del comportamiento gráfico  
199 de la temperatura, y para ello se pueden comparar los parámetros obtenidos a partir  
200 de las condiciones iniciales (éstas se toman de los datos experimentales, como es el  
201 caso de la temperatura inicial) con los obtenidos de un modelo de regresión para el  
202 ajuste exponencial de la curva experimental obtenida.

203

## 204 **5. Conclusiones**

205

206 En primera instancia, consideramos que esta TAM conformada a su vez por una  
207 secuencia de tres actividades, puede coadyuvar a una mayor comprensión de la  
208 forma de ir estructurando junto con los estudiantes un proceso de modelación,  
209 entendiendo que en el caso de estudio, la ecuación diferencial relacionada sirve para  
210 explicar la evolución en el tiempo de las variables que intervienen en un fenómeno  
211 real.

212

213 Los autores de este trabajo consideramos importante la labor del docente,  
214 concretamente de realizar una actividad investigativa para proponer tareas de  
215 aprendizaje matemático (TAM) para sus estudiantes, tomando como base los  
216 distintos principios teórico-metodológicos planteados desde los distintos enfoques  
217 teóricos.

218

219 En este contexto, poner en práctica algunos de los principios señalados como son el  
220 uso de distintos registros de representación, el marco contextual de una situación del  
221 mundo real, o la utilización de herramientas digitales para apoyar la comprensión de  
222 ideas y conceptos, así como las diferentes acciones que el docente puede adoptar  
223 durante la etapa de implementación de una tarea en el aula, permiten visualizar que  
224 este tipo de tareas pueden potenciar aprendizajes más robustos, que a su vez  
225 permitan incrementar el interés y la comprensión de los distintos conceptos e ideas  
226 involucrados.

227

228

229

230 **6. Índice de referencias**

231

232 Libros

- 233 • Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht, The  
234 Netherlands: Kluwer.

235

236 Capítulo de libros

- 237 • Santos-Trigo, M. (2020). La Resolución de problemas matemáticos:  
238 conectando el trabajo de Polya con el desarrollo de un razonamiento digital.  
239 En Yuri Morales-López y Ángel Ruíz (eds) *Educación Matemática en las*  
240 *Américas*. Comité Interamericano de Educación Matemática, República  
241 Dominicana, (pp. 29-40).

242

243 Revistas

- 244 • Barrera, F. y Reyes, A. (2019). Reasoning processes developed by  
245 undergraduate mathematics students during the solution of geometry  
246 problem. *Far East Journal of Mathematics Education*, 19 (1), 61-86.
- 247 • Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad  
248 para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la RSME*, 143-168.
- 249 • Korsunsky, B. (2002). Improper Use of Physics-Related Context in High  
250 School Mathematics Problems: Implications for Learning and Teaching. *School*  
251 *Science and Mathematics*, 102, 107-113.
- 252 • Nieves, S; Caraballo, C. M. y Fernández, C. L. (2019). Metodología  
253 para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático desde la  
254 demostración por inducción complete. *Revista Mendive*, 17 (3), 393-408.
- 255 • Campos, M. y Torres, A. (2018). Diseño de Tareas de Aprendizaje con  
256 GeoGebra: mecanismos articulados, *Revista Pädí*, 5 (10). 81-86. DOI:  
257 <https://doi.org/10.29057/Yicbiv5.i10>.
- 258 • Rodríguez, R., Quiroz, S. (2016). El Papel de la Tecnología en el Proceso de  
259 Modelación Matemática para la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales.  
260 *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19 (1),  
261 99-124. DOI: <https://doi.org/10.12802/relime.13.1914>.
- 262 • Santos-Trigo, M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el  
263 aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva*, 20, 24-258
- 264 • Torres, A.; Campos, M.; Reyes, A. y Soto, C. (2022). Diseño de tareas con  
265 Tecnología: entre investigación y docencia. *Revista Pädí*, 9 (18), 29-34. DOI:  
266 <https://doi.org/10.29057/icbi.v9i18.7133>.



# MEDICIÓN DE ESFUERZOS RESIDUALES EN COMPONENTES SOLDADOS

García Lira Jesús<sup>1\*</sup>, Velázquez Vázquez María de Jesús y Castillo Sánchez Martín Dario

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL ESIME AZ. Av. de las Granjas No. 682, Col. Sta. Catarina Azcapotzalco, C.P. 02550, México

AP- POSM022

## Resumen

Los esfuerzos residuales internos de la estructura de un material o componente son las tensiones que existen en él cuando no hay (y a veces cuando ni siquiera ha habido anteriormente) sollicitaciones o cargas externas. Los procesos de conformado son las causas más comunes que provocan los esfuerzos residuales. Virtualmente todos los procesos de conformado y fabricación por fundición, soldadura, mecanizado, moldeado, tratamientos térmicos, etc. introducen esfuerzos residuales en el objeto conformado. Hay muchos métodos para la caracterización de los esfuerzos residuales en ingeniería de componentes soldados. Las mediciones de los esfuerzos residuales pueden ser muy costosas. Antes de seleccionar un método sobre otro, es importante considerar las ventajas y limitaciones de las técnicas para optimizar los beneficios de la investigación. En este trabajo, las técnicas destructivas, semidestructivas y no destructivas son revisadas. Se presenta el uso de galgas extensométricas para la medición y determinación de esfuerzos, así como, el uso del método del elemento finito en la simulación y determinación de los mismos. El método de elemento finito está basado en una serie de funciones matemáticas que nos permiten discretizar un modelo y poder determinar lo que sucede en el interior del mismo.

**Palabras clave:** Esfuerzos residuales, soldadura, simulación, galgas.

## 1. Introducción

### 1.1 Esfuerzos

Los esfuerzos residuales pueden definirse como aquellas tensiones que permanecen en un material, después de la fabricación y procesamiento en ausencia de fuerzas externas y térmicas. Se refieren a las tensiones internas o tensiones bloqueadas en ocasiones. Estas tensiones internas se equilibran dentro del componente. Si los esfuerzos residuales de tensión y de compresión son desequilibrados, el cuerpo se deforma para restaurar equilibrio. Debe tenerse en cuenta que los esfuerzos residuales son tridimensionales y pueden ocurrir en una componente, tanto a nivel macroscópico y microscópico [1,2]. Tres tipos de esfuerzos de tensión se definen en función de su escala: macroesfuerzos,  $\sigma_I$ , (o esfuerzos de primer tipo) que actúan en el ámbito de algunos granos; los esfuerzos de segunda clase,  $\sigma_{II}$ , actúa sobre un grano en particular; los esfuerzos de tercer tipo,  $\sigma_{III}$ , que actúan a través de áreas submicroscópicas, a varias distancias atómicas dentro de un grano. Se destaca que

<sup>1</sup> Autor para la correspondencia. \* E-mail: avinifer66@gmail.com Tel. 57296000 Ext.54645

45 la segunda clase y el tercer tipo también se denominan microesfuerzos, Figura 1.

46

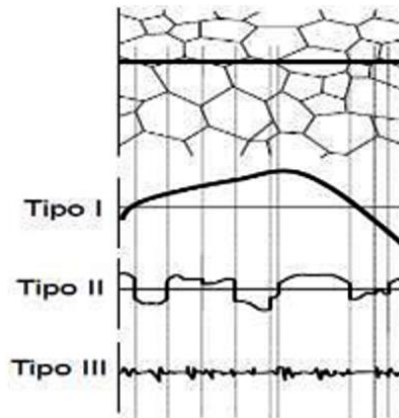


Figura 1. Tipos de esfuerzos residuales

47

48

49

50

51 Gran parte de las fallas producidas en componentes soldados, mismos que han oca-  
 52 sionado muertes y grandes pérdidas económicas, se deben a una rotura frágil de los  
 53 componentes. Por lo general, la fractura frágil se inicia en grietas originadas durante  
 54 la operación de soldadura, y se propagan en forma violenta debido a la presencia de  
 55 tres factores importantes:

56

- 57 • Fases frágiles (Martensita en la ZAC)
- 58 • Absorción de hidrógeno
- 59 • Esfuerzos residuales

60

61 La presencia de estos elementos le otorga una baja tenacidad al material base, oca-  
 62 sionando un comportamiento frágil del mismo. Esta situación suele conducir a lo que  
 63 se conoce como rotura frágil catastrófica. Los esfuerzos residuales también pueden  
 64 originarse como una consecuencia de un cambio en la conectividad de un componente  
 65 soldado, es decir como resultado de (macro) dislocaciones.

66 En particular, en estructuras soldadas los esfuerzos residuales se forman principal-  
 67 mente como resultado de contracciones que se producen cuando se solidifica el metal  
 68 de la soldadura hasta la temperatura ambiente. Una soldadura se calienta localmente  
 69 en el proceso de esta; la distribución de la temperatura en la soldadura no es uniforme  
 70 y los cambios son a medida que avanza la aplicación de soldadura. La temperatura  
 71 afecta en las distribuciones de la expansión y contracción del material y la relación  
 72 entre el esfuerzo y la tensión y por lo tanto los esfuerzos residuales [3,4].

73 Durante las últimas décadas, se han desarrollado diversos métodos cuantitativos y  
 74 cualitativos para medir los esfuerzos residuales. Sin embargo, el esfuerzo residual no  
 75 se puede medir directamente. Se deriva de las mediciones de deformación residual.  
 76 Además, ninguna técnica de medición puede medir la deformación residual en un solo  
 77 punto en un componente. El método del elemento finito se basa en transformar un  
 78 cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado, esta transformación

79 se denomina discretización del modelo. El conocimiento de lo que sucede en el interior  
 80 de este modelo del cuerpo aproximado, se obtiene mediante la interpolación de los  
 81 valores conocidos en los nodos. Es por tanto una aproximación de los valores de una  
 82 función a partir del conocimiento de un número determinado y finito de puntos.  
 83 Diversas técnicas miden una tensión promedio durante un volumen de calibre mues-  
 84 treado.  
 85 La figura 2 muestra una junta a tope con ranura en V sometida a una carga de tensión  
 86 F, para cargas de tensión o compresión el esfuerzo normal medio es Ec. (1), [5].

87 
$$\sigma = \frac{F}{hl} \quad (1)$$

88  
 89 Donde h es la garganta, y l es la longitud del cordón de la junta.

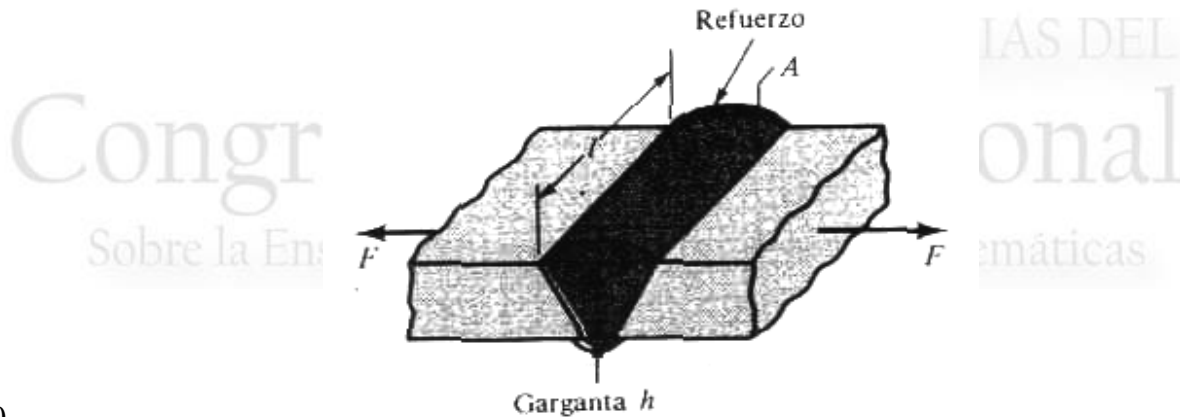


Figura 2. Junta de soldadura a tope

90  
 91  
 92 El esfuerzo medio en una junta a tope debido a carga cortante es Ec. (2).  
 93

94  
 95 
$$\tau = \frac{F}{hl} \quad (2)$$

96 El área de la garganta es  $A = hl \cos 45^\circ = 0.707hl$ , donde l es el largo de la junta. Por  
 97 consiguiente, el esfuerzo es Ec. (3).  
 98

99  
 100 
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{0.707hl} \quad (3)$$

101 Este esfuerzo puede dividirse en dos componentes, un esfuerzo cortante  $\tau$  y un  
 102 esfuerzo normal  $\sigma$  que se expresan en las Ecs. (4) - (5).  
 103

104  
 105 
$$\tau = \sigma_x \cos 45^\circ = \frac{F}{hl} \quad (4) \quad \sigma = \sigma \cos 45 = \frac{F}{hl} \quad (5)$$

106  
 107 **2. Metodología**

108  
 109 2.1 Técnicas de medición de esfuerzos residuales

110 La medición de esfuerzos residuales puede realizarse mediante métodos destructivos  
 111 y no destructivos. En el caso de los métodos destructivos se hace una distinción entre  
 112 destrucción parcial y destrucción total de la probeta o componente. Los métodos par-  
 113 cialmente destructivos incluyen el uso de pequeños agujeros o canales circulares en  
 114 la superficie del componente, que permiten su uso posterior. En todos los métodos de  
 115 medición de esfuerzos residuales es indispensable mantener una temperatura constan-  
 116 te para obtener resultados confiables [6].

117

118 2.1.2 Métodos destructivos

119 Existen otros métodos, como el de agujero ciego taladrado, el del canal circular, el de  
 120 remoción de capas y otros que tienen el mismo principio que los anteriores: la medición  
 121 de deformaciones y el posterior cálculo de los esfuerzos asociados [6].

122

123 2.1.3 Técnica del hole-drilling

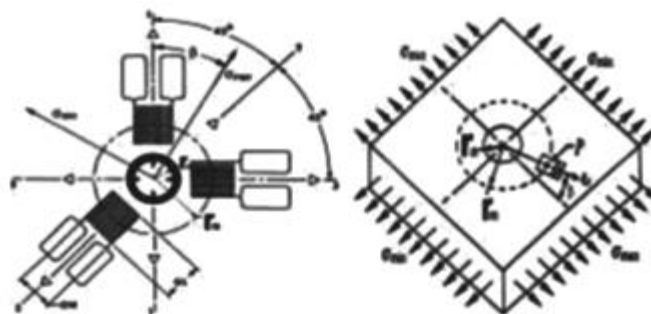
124 El método de “Hole Drilling” es uno de los métodos de medición de esfuerzos resi-  
 125 duales más comúnmente empleados, ya que el equipo requerido para realizar las  
 126 mediciones tiene un costo razonable y la técnica es relativamente simple [7]. El mé-  
 127 todo se encuentra, relativamente, bien desarrollado en comparación con otros méto-  
 128 dos no destructivos, los cuales requieren considerable trabajo de investigación y  
 129 desarrollo antes de quedar completamente disponibles para aplicaciones generales  
 130 en función del material y condiciones del campo de esfuerzos. El método de “Hole  
 131 Drilling” requiere perforar un pequeño orificio, normalmente de 1 a 4 mm de diámetro,  
 132 a una profundidad aproximadamente igual a su diámetro. Se utiliza una galga especial  
 133 tipo roseta de tres elementos para medir las deformaciones superficiales relajadas en  
 134 el material alrededor del orificio perforado [8]. Finalmente, los esfuerzos residuales  
 135 existentes en el material antes de la perforación del orificio pueden ser calculados a  
 136 partir de las deformaciones relajadas. El método de “Hole Drilling” está considerado  
 137 como semi-destructivo, ya que el material removido está limitado, y en la mayoría de  
 138 los casos puede ser tolerado o reparado adecuadamente, figura 3.

139

140 2.1.4 Métodos de Difracción

141 El haz (ya sean rayos X, o haz de electrones) se difracta al incidir sobre la estructura  
 142 cristalina, produciéndose un fenómeno de interferencia del cual es posible concluir el  
 143 grado de separación de los planos respecto a un estado libre de esfuerzos, figura 4.

144



145  
146

**Figura 3. Geometría de una roseta típica de tres elementos empleada en el método de “Hole**

147  
148

Drilling”

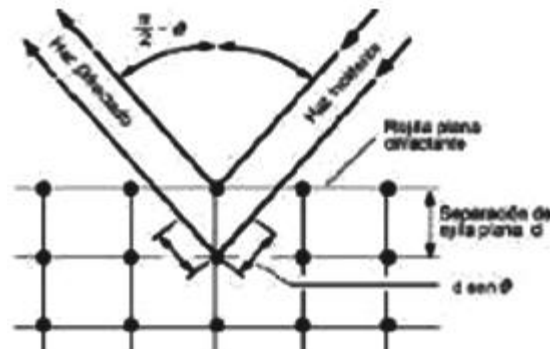


Figura 4. Difracción reflexiva de un haz en estructura cristalina

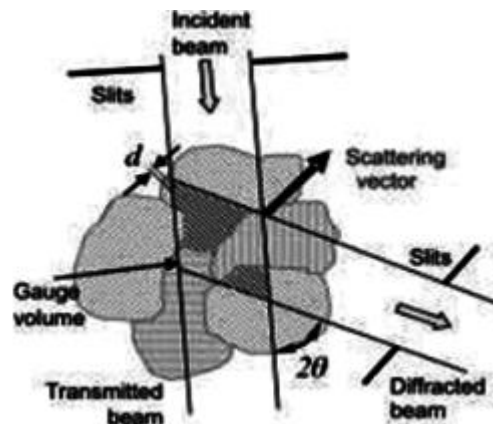
149  
150  
151

Las técnicas de difracción se basan en el uso del espaciado reticular como una medición de la deformación. Permite el estudio y la separación de los tres tipos de esfuerzos residuales [9]. Es una de las técnicas no destructivas más eficientes. Con las mediciones de difracción proporcionan mucha más información que las técnicas del calibrador de tensión. Un subconjunto bien definido de granos en el volumen de muestreo de producción de la difracción de cada medición de pico da una idea acerca del micro y el macrotensiones dentro de la muestra. Las técnicas de difracción exploran la red cristalina del material como medidor de tensión atómica como se muestra en la Figura 5. Cuando un haz pasa a través del material policristalino, la difracción se produce de acuerdo a la ley de Bragg que viene dada por la ecuación 6:

$$n\lambda_i = 2d \text{ sen}\theta_i \quad (6)$$

162  
163  
164  
165  
166  
167

Donde  $n$  es cualquier número entero y  $\theta_i$  es el ángulo de Bragg para un plano cristalográfico,  $i$ , es el espaciamiento interplanar,  $d_i$ .



168  
169  
170  
171

Figura 5. Principios de la técnica de difracción que muestran la reflexión de Bragg de un cristal del plano d.

Bajo un esfuerzo de tracción aplicado (o compresión), en la red espacial ( $d_i$ ) en un

173 grano cristalino individual se expande cristales. Este cambio en la red espacial puede  
 174 ser detectado, en una longitud de onda constante, como un cambio ( $\theta_i$ ) en el pico di-  
 175 fractado, en la Ecuación de Bragg (1).

176

177 2.1.5 Métodos elastoacústicos

178 Estos métodos se basan en la relación entre la velocidad de propagación de ondas  
 179 ultrasónicas con ciertas propiedades elásticas. El método involucra crear ondas longi-  
 180 tudinales, transversales o superficiales en la pieza de trabajo y medir el cambio de  
 181 velocidad causado por los esfuerzos [6].

182

183 2.1.6 Métodos Magnéticos

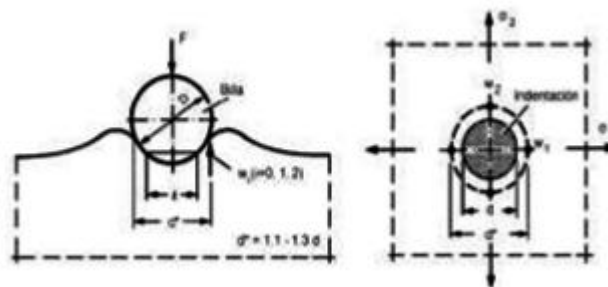
184 Los esfuerzos residuales causan cambios en las propiedades magnéticas de materia-  
 185 les ferromagnéticos. Las propiedades evaluadas comprometen el efecto Barkhausen  
 186 de inducción magnética y magneto-acústica, el incremento en la permeabilidad para  
 187 corrientes parásitas, etc. Dado que las propiedades magnéticas, también son influen-  
 188 ciadas por el estado microestructural y textura, cada estado requiere su propia cali-  
 189 bración [6].

190

191 2.1.7 Métodos Holográficos

192 El método de indentación con billa, se basa en la medida de la profundidad de la su-  
 193 perficie vecina al área de indentación. La billa es presionada en la superficie del mate-  
 194 rial, similar al procedimiento para un ensayo de dureza Brinell, primero en una pro-  
 195 beta libre de esfuerzos obteniéndose  $w_0$ , luego se aplica el procedimiento a una pro-  
 196 beta con un nivel definido de esfuerzos obteniéndose un coeficiente de calibración, y  
 197 finalmente en la probeta con esfuerzos desconocidos, obteniéndose las medidas  $w_1$   
 198 y  $w_2$  en los vértices de las direcciones principales de esfuerzo (ver figura 6). Con  
 199 estas medidas se determinan los estados de esfuerzo [6].

200



201

202

203

204

205

206

**Figura 6. Medición de esfuerzos residuales en la superficie de un componente mediante el método de indentación con billa, con fuerza compresiva (F), diámetro de billa (D), diámetro de indentación (d), diámetro del círculo de medición ( $d^*$ ), profundidades de deformación ( $w_i$ ) y esfuerzos residuales ( $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ ).**

207

207 2.1.8 Difracción de neutrones

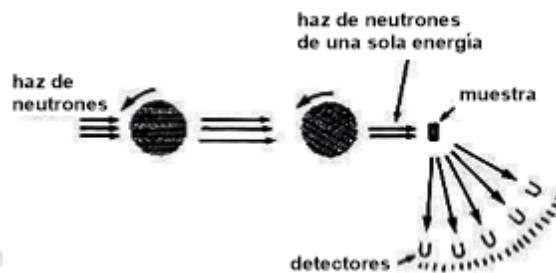
208

209

210

La difracción de neutrones (ND) es una técnica de medición que se asemeja mucho a la metodología de difracción de rayos X y al formalismo analítico. Sin embargo, debido a los neutrones interactúan con los núcleos y los rayos X con los electrones,

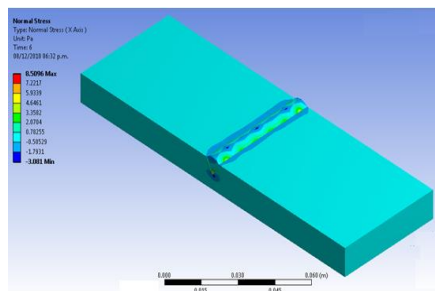
211 los neutrones son típicamente alrededor de mil veces más penetrantes que las radio-  
 212 grafías. Por lo tanto, la difracción de neutrones es excelente en su capacidad para  
 213 obtener esfuerzos residuales en el interior de los componentes, en tres dimensiones,  
 214 en los volúmenes de ensayo pequeños (hasta  $30.5 \times 0.5 \times 1 \text{ mm}^3$ ) y en muestras  
 215 gruesas (hasta varios cm), figura 7.  
 216 La norma internacional ISO/ TS 21432-2005 [10], para la medición de esfuerzos resi-  
 217 duales utilizando para difracción de neutrones está siendo desarrollado en una forma  
 218 de anillo para lograr mediciones de esfuerzos confiables.  
 219



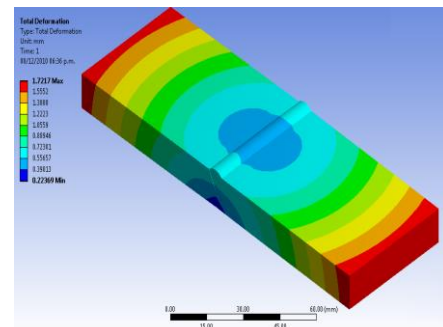
220  
 221 **Figura 7. Esquema de un espectrómetro de tiempo de vuelo para el análisis microscópico de**  
 222 **una muestra.**

### 224 3. Resultados y análisis

225  
 226 La simulación numérica nos permite obtener los esfuerzos residuales y deformaciones  
 227 durante el proceso de soldadura. Los resultados de deformaciones obtenidos son  
 228 aproximados y razonables, La atención de varios investigadores de los últimos años,  
 229 se ha dirigido al análisis y modelación de los esfuerzos residuales provocados por la  
 230 soldadura, producto del calor no uniformemente distribuido en la junta, el efecto de la  
 231 contracción y como consecuencia las deformaciones mediante métodos  
 232 computacionales (ver figura 8, 9) [11,12].  
 233



234  
 235 **Figura 8. Esfuerzo normal en el cordón de la Soldadura**



236  
 237 **Figura 9. Deformación total de la probeta**

### 236 4. Conclusiones

237 Gran parte de las fallas producidas, que ocasionan la muerte de seres humanos y

238 grandes pérdidas económicas, en su mayoría son causadas por: la presencia de fases  
239 frágiles en la ZAC, absorción de hidrógeno y presencia de esfuerzos residuales, de  
240 los tres factores mencionados los esfuerzos residuales no se pueden evitar, pero si  
241 mitigar, hasta ahora se han desarrollado métodos empíricos para tal fin, básicamente  
242 por desconocimiento de la distribución y magnitud de los esfuerzos residuales.  
243 Como se puede observar en las imágenes, el análisis con un simulador, el cual es  
244 desarrollado a través de ecuaciones y programas matemáticos, nos permite predecir  
245 el comportamiento de la unión soldada y se convierte en una valiosa herramienta vir-  
246 tual complementaria en las prácticas de educación en ingeniería.

247

## 248 5. Referencias

249

- 250 [1] D. Radaj.(1992). Heat Effects of Welding. *Temperature Field, Residual Stresses,*  
251 *Distortion.* Editorial Springer Verlag.
- 252 [2] D. Radaj.(2003). *Welding Residual Stresses and Distortion.* Calculation and  
253 Measurement. Editorial DVS Verlag.
- 254 [3] AWS. Welding Metallurgy (1994). Volume 1, Fundamentals. American Welding  
255 Society. Cuarta Edición.
- 256 [4] L. Karlsson.(1986) *Thermal Stresses in Welding. In: Thermal stresses,* Vol. 1  
257 (Ed.: R. B. Hetnarski), pp. 299-389. Amsterdam: North-Holland.
- 258 [5] R. Davis (1997). “*Heat – Resistant Materials*”, American Society for Metals,  
259 Handbook, USA.
- 260 [5] V. Carrión.(2005). *Análisis Térmico-Mecánico de Soldadura mediante el Método*  
261 *de los Elementos Finitos.* Tesis para optar por el título de ingeniero mecánico.
- 262 [6] C. Ruud (2002). *Handbook of Residual Stresses and Deformation of Steel,* Edited  
263 by [7] G. Totten, M. Howes and T. Inoue, ASM International, pp. 99-110.
- 264 [8] G. S. Schajer, G. Roy, M. T. Flaman and J. Lu (1996). *Handbook of Measurement*  
265 *of Residual Stresses,* Edited by J. Lu, Society for Experimental Mechanics, Inc.,  
266 pp. 5-34.
- 267 [9] E. Macherauch and K.-H. Kloos (1986). *Proc. Int. Conf. Residual Stresses in*  
268 *Science and Technology,* Vol. 1, Garmisch- Partenkirchen, DGM-Verlag,  
269 Oberursel, pp. 3-26.
- 270 [10] ISO/TTA 3:2001 Polycrystalline materials – Determination of residual stresses  
271 by Neutron Diffraction.
- 272 [11] L. E. Lindgren (2001) “Finite Element Modelling and Simulation of Welding. Part I”;  
273 Increased Complexity, *Journal of Thermal Stresses,* Vol. 24, pp 195-231.
- 274 [12] L. E. Lindgren (2001), “Finite Element Modelling and Simulation of Welding. Part  
275 III”; Efficiency and Integration, *Journal of Thermal Stresses.* Vol 24, pp. 305-334.
- 276



## PROPUESTA DE TAREA DE APRENDIZAJE PARA EL TEMA DE DESIGUALDADES DEL CURSO DE CÁLCULO

Torres Rodríguez Agustín Alfredo<sup>1\*</sup>, Hernández Hernández Jonathan Israel y  
Sánchez Orozco Ana Pamela

*Tecnológico Nacional de México campus Atitalaquia. Av. Tecnológico N.9, Col.  
Tezoquipa, Atitalaquia, Hgo.C.P. 42970.*

**EN-POSM023**

### Resumen

*Durante la enseñanza del cálculo diferencial se presentan contenidos que pueden representar dificultades en su aprendizaje, donde la comprensión puede resultar incompleta, debido entre otras razones a la falta de una estrategia didáctica pertinente, que permita alcanzar un mejor grado de comprensión. En esta contribución, se tuvo como objetivo el diseño de una tarea de aprendizaje matemático (TAM) para el tema de intervalos y desigualdades que se aborda en un curso regular de cálculo diferencial a nivel universitario. Contempla el empleo de las operaciones lógicas de intersección y unión de conjuntos, así como las propiedades de campo y de orden de los números reales para estructurar una secuencia didáctica que permita resolver desigualdades de primer y segundo grado. Esta tarea se basa en la utilización de algunos elementos que han sido identificados por diversas investigaciones en la enseñanza de las matemáticas, en este caso el empleo de distintos registros de representación y la utilización de herramientas digitales como tecnologías para el aprendizaje y el conocimiento (TAC), como elementos centrales de la propuesta.*

**Palabras clave:** *desigualdades, intervalos, curso de cálculo, Tarea de Aprendizaje Matemático, operaciones lógicas de conjuntos.*

### 1. Introducción

En la materia de cálculo diferencial se revisa el tema relativo a intervalos y desigualdades, las cuales tienen también una representación geométrica como segmentos lineales en la recta (Stewart, 1998). Para que el estudiante alcance una comprensión más profunda acerca de este contenido, se requieren algunos conocimientos previos de los conjuntos numéricos, la notación relativa a los intervalos en la recta numérica, así como también acerca de las reglas para la resolución de desigualdades, e igualmente para las operaciones básicas de multiplicación o división.

Pareciera que estos contenidos, que normalmente se revisan al inicio del curso de cálculo, representarían menos dificultades al estudiante, en comparación con los contenidos relativos a la derivación de funciones o los que tienen relación con algunas aplicaciones de la derivada, que son los contenidos subsiguientes dentro de un curso de cálculo diferencial. Por la forma en que están estructurados muchos de

---

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: [agustin.tr@atitalaquia.tecnm.mx](mailto:agustin.tr@atitalaquia.tecnm.mx)

43 estos cursos, los contenidos en cuestión se localizan generalmente al inicio, ya que  
44 constituyen la base para posteriormente comprender aspectos sobre el dominio y  
45 rango de las funciones, además de otros conceptos como el de continuidad de las  
46 funciones de variable real en un intervalo o en su dominio, por ejemplo.

47 Sin embargo, al ahondar un poco más sobre la resolución de desigualdades, se  
48 pueden identificar algunas dificultades en relación con los conocimientos previos de  
49 los estudiantes sobre propiedades de los números reales, como es el caso de  
50 diferentes postulados y teoremas que proporcionan sustento a la resolución de  
51 desigualdades; así como también se identifica la necesidad de utilizar algunos  
52 elementos de lógica matemática, concretamente las operaciones de unión e  
53 intersección de conjuntos. Adicionalmente a las dificultades identificadas, al revisar  
54 los libros de texto de pre-cálculo o de cálculo diferencial de nivel universitario, se  
55 puede afirmar que no es común hacer referencia al uso de estas operaciones lógicas  
56 de conjuntos, cuando se aborda el tema de la resolución de desigualdades de primer  
57 y segundo grado (Larson, Hostetler y Edwards, 2002; Stewart, 1998), y lo mismo  
58 puede decirse al revisar la forma en que abordan esta temática los libros de texto de  
59 nivel bachillerato (CONAMAT, 2009; Haaser, LaSalle y Sullivan, 2009; Rider, 1978).  
60 Los autores de esta propuesta consideramos que el empleo de dichas operaciones  
61 lógicas puede contribuir a enriquecer la estructura de una tarea de aprendizaje (TAM)  
62 que aborde la resolución de desigualdades de primer y segundo grado.

## 63 2. Referentes teórico-conceptuales

64

65 Para el diseño de esta actividad, se consideran como marcos de referencia los  
66 siguientes: el empleo de las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) en  
67 la enseñanza de las matemáticas, el diseño de actividades o tareas de aprendizaje  
68 matemático (TAM), así como los diferentes registros de representación de los objetos  
69 matemáticos (Duval, 2005).

70 En los últimos años, se han incrementado las propuestas para la incorporación de las  
71 TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje, por ello en la literatura más reciente  
72 se habla ahora del término TAC, para hacer referencia al empleo específico de las  
73 herramientas digitales en servicio de la enseñanza y el aprendizaje (Moya, 2013). En  
74 este sentido, los autores de esta contribución coinciden con el modelo denominado  
75 TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge, por sus siglas en inglés,  
76 Mishra y Koehler, 2006), que propugna que el docente se preocupe por desarrollar  
77 un entorno de aprendizaje mediante la selección y empleo de recursos digitales, que  
78 sirva como base para el diseño y desarrollo de tareas de aprendizaje en la  
79 enseñanza de las matemáticas.

80 Por su parte, estas *tareas de aprendizaje matemático* (TAM) consisten en actividades  
81 de clase cuyo propósito es centrar la atención del estudiante en una idea matemática  
82 particular, o bien en desarrollar cierta habilidad (Bayazit, 2006). Sin embargo, las  
83 tareas requieren para su diseño de una serie de pasos: el objetivo o las

84 competencias a desarrollar, los conocimientos previos del estudiante, el enunciado  
 85 mismo de la actividad o tarea, el contexto, y las posibles trayectorias o rutas de  
 86 solución, así como las acciones del docente en el aula al momento de la  
 87 implementación de la tarea (Campos y Torres, 2017; Barrera y Reyes, 2013).

88 Un tercer referente teórico que tomamos como base para esta propuesta, es la  
 89 Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval (2005), según la cual “enseñar  
 90 y aprender matemática, conlleva la utilización de distintos registros de representación  
 91 y de expresión” (Oviedo et al. 2012:30). Lo anterior significa que el empleo  
 92 simultáneo y articulado de diferentes formas semióticas, tales como operaciones,  
 93 símbolos, gráficos y figuras geométricas, permite una mejor comprensión de un  
 94 concepto matemático. La premisa en que se basa esta postura, es que los objetos  
 95 matemáticos se requieren conocer a través de sus distintas representaciones para  
 96 alcanzar una mayor comprensión conceptual, y además se pretende que el  
 97 estudiante logre transitar hábilmente entre los diferentes registros, y consiga  
 98 aprehender los conceptos implicados.

99 **2. Metodología o desarrollo**  
 100

101 En este trabajo se realiza una propuesta que consiste en determinar los valores que  
 102 puede asumir la variable independiente en un grupo de inecuaciones. La tarea  
 103 incluye una secuencia de 3 ejercicios de complejidad creciente. La estructura general  
 104 de la TAM se muestra en la tabla siguiente (Tabla1).

**Tabla 1. Estructura de la tarea de aprendizaje propuesta.**

Ejercicio	Registros de representación	Conceptos involucrados	Empleo de herramienta TAC
$2x^2-x-3<0$	1.-Intervalos en la recta numérica.	1.-Postulados de campo y orden de los números reales 2.-Operaciones con conjuntos	
$X^2-7x+10\geq 0$	1.-Intervalos en la recta numérica	1.-Postulados de campo y orden de los números reales 2.-Operaciones con conjuntos	1.-Empleo del software graficador
$X^3-4x^2-7x+10>0$	2.-Operaciones lógicas de conjuntos	3.-Operaciones con proposiciones abiertas	

106 Es importante añadir que se involucra el empleo de diferentes registros de  
 107 representación. Asimismo, se incorporan conceptos y operaciones provenientes de  
 108 los temas de *representación y operaciones lógicas con conjuntos*, así como de los  
 109 postulados o *axiomas de campo y de orden* para los números reales. El segundo  
 110 punto a destacar es que puede acoplarse a la propuesta el empleo de herramientas  
 111 digitales (TAC) para proporcionar otros registros de representación que favorezcan  
 112 una mayor comprensión del objeto matemático.


113 **3. Resultados y análisis**

114

115 A continuación se presentan los resultados principales, empleando como ejemplo el  
 116 desarrollo de uno de los ejercicios de la tabla 1, en este caso, el tercer ejercicio que  
 117 corresponde a una inequación de grado tres que tiene la característica de ser  
 118 factorizable:  $X^3-4x^2-7x+10>0$ . Este hecho permite utilizar los elementos de lógica de  
 119 conjuntos (operaciones de intersección y unión), así como la representación gráfica  
 120 (los intervalos). Para presentar la secuencia en la resolución de la actividad, se  
 121 recurre a un conjunto de tablas que representan cada una de las etapas para la  
 122 resolución del ejercicio (ver tablas 2, 3 y 4).

123

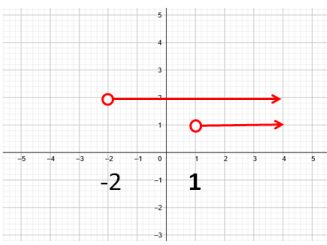
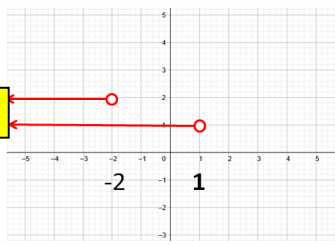
Sobre el Congreso Internacional  
 Sobre Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas  
**Tabla 2. Ejercicio 3: [primera parte, caso A donde  $(x-5)>0$  y  $(x^2+x-2)>0$ ]**

Primer paso: factorización	$X^3-4x^2-7x+10 > 0 \rightarrow (x-5)(x^2+x-2) > 0$		
Segundo paso: caso A se subdivide en 2 casos (A1 y A2)	Caso A.1: $(x-5)>0$	<b>y</b>	Caso A.2: $(x^2+x-2)>0$
Tercer paso: empleo de las propiedades de las desigualdades (propiedades de campo y orden)	$x>5$		$(x-1)(x+2)>0$
Cuarto paso: resolución de desigualdad cuadrática (en dos sub-casos): leyes de signos del producto.	$x>5$	<b>y</b>	$(x-1)>0$ y $(x+2)>0$ $(x-1)<0$ y $(x+2)<0$
Quinto paso: Resolución de desigualdades locales EN EL CASO A.2			$x>1$ y $x>-2$ <b>ó</b> $x<1$ y $x<-2$

124

125 En esta primera tabla (tabla 2) se muestran los primeros 5 pasos del proceso de  
 126 solución del caso A.2, en los recuadros de color amarillo se muestran las  
 127 operaciones de intersección (conectivo “y”) y unión (conectivo “o”) que permiten ir  
 128 resolviendo el ejercicio mediante la lógica de las operaciones de conjuntos. En  
 129 seguida se muestran los siguientes pasos del procedimiento (ver tabla 3), se incluyen  
 130 los registros gráficos empleados en el sexto paso para apoyar la comprensión. Para  
 131 la elaboración de los gráficos se empleó el software GeoGebra®.

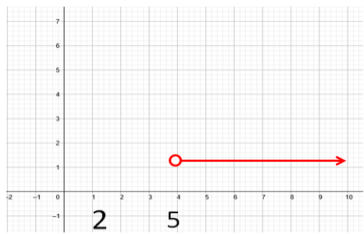
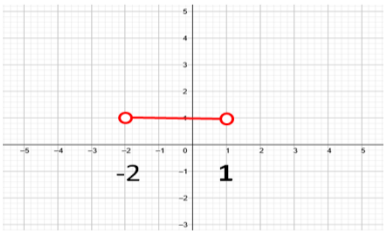
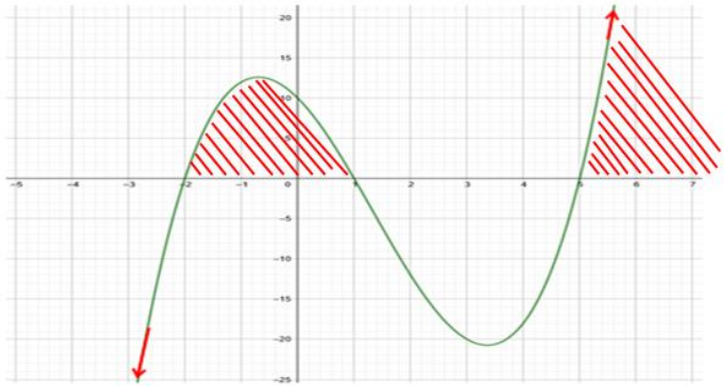
132 **Tabla 3. Ejercicio 3: [primera parte, caso A dónde  $(x-5)>0$  y  $(x^2+x-2)>0$ ]**

133 Sexto paso: apoyo de registros gráficos	$x > 5$		<b>ó</b>		
Séptimo paso: se resuelven las intersecciones locales en el caso A.II	$x > 5$	<b>y</b>	$x > 1$	<b>ó</b>	$x < -2$
Octavo paso: unión local de intervalos en el caso A.II	$(5, \infty)$	$(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$			
Noveno paso: intersección principal de intervalos de los casos A.1. y A.2.	$(5, \infty)$  (intersección de casos A.I y A.II)				

135 Sin embargo, se debe considerar que el resultado logrado hasta este paso, solo  
 136 representa una parte del procedimiento total para poder resolver el ejercicio. Falta  
 137 entonces desarrollar el caso cuando se cumplen las condiciones siguientes:  $(x-5)<0$  y  
 138  $(x^2+x-2)<0$ . Llamaremos a esta segunda parte del análisis, caso B, este análisis se  
 139 realiza de forma similar al del caso A.

140  
 141 En una última parte se reúnen ambos resultados parciales, para obtener finalmente  
 142 el intervalo solución del ejercicio entero, en este caso se requiere la operación de  
 143 unión de las 2 soluciones parciales (vistas como conjuntos), el resultado final se  
 144 muestra en la tabla 5. Adicionalmente, se muestra el gráfico de la ecuación cúbica  
 145 que se relaciona con la desigualdad planteada originalmente, para corroborar el  
 146 resultado obtenido (el área sombreada coincide con los intervalos solución).  
 147

**Tabla 4. [tercera parte, solución final]**

	Caso A		Caso B
Intervalo obtenido	$(5, \infty)$	<b>ó</b>	$(-2, 1)$
Registro gráfico			
Operación de unión casos A y B	$(-2, 1) \cup (5, \infty)$		
Se corrobora con el gráfico de la función asociada a la desigualdad (trazada en GeoGebra®), ya que los intervalos dónde la expresión es mayor a cero (áreas sombreadas) es el intervalo:  $(-2, 1) \cup (5, \infty)$			

149

150 Como puede apreciarse en el ejemplo desarrollado, el tipo y características de las  
 151 operaciones lógicas de intersección y unión que deben emplearse, así como la  
 152 resolución de las desigualdades mediante la utilización de las reglas de campo y  
 153 orden de los números reales, o la representación gráfica de los intervalos son  
 154 elementos centrales. La complejidad del ejercicio mostrado en las tablas 2, 3 y 4, se  
 155 relaciona con la necesidad de desarrollar las operaciones respetando las relaciones  
 156 jerárquicas, en este caso dos casos (A y B) que a su vez se subdividían en otros  
 157 casos menores. En la parte final, se debe todavía realizar otra operación lógica,  
 158 consistente en la unión de los casos A y B (simbolizada en el lenguaje de conjuntos  
 159 por  $A \cup B$ ).

160 **4. Conclusiones**

161

162 Una primera conclusión se refiere a la posibilidad de utilizar distintos conocimientos  
 163 previos de los estudiantes, para estructurar un proceso de solución para

164 desigualdades de primer y segundo grado (estas últimas de tipo factorizable). Dentro  
165 de estos antecedentes podemos enlistar los siguientes: las propiedades de campo y  
166 orden de los números reales, la representación de los intervalos en la recta  
167 numérica, los procesos de factorización para inecuaciones de segundo grado, las  
168 propiedades del producto y las leyes de los signos, entre otros.

169 Una segunda conclusión se relaciona con la incorporación de conceptos e ideas  
170 provenientes de los 3 referentes teóricos considerados en el diseño de la TAM: el  
171 empleo de las operaciones lógicas de conjuntos, las características que deben  
172 incluirse en una tarea de aprendizaje matemático, y el uso de herramientas digitales  
173 para la enseñanza (TAC). La inclusión de estos elementos permite enriquecer la  
174 propuesta, de modo que la tarea permita al estudiante utilizar distintos registros de  
175 representación, como son el algebraico, el geométrico y el gráfico; además de  
176 propiciar los procesos de reflexión a través de los principios de lógica matemática  
177 incluidos en la resolución de las operaciones lógicas de intersección y disyunción de  
178 conjuntos.

179 Con base en lo señalado, los autores de esta propuesta consideramos que la  
180 utilización de este tipo de tarea puede promover una mejor comprensión de la  
181 solución de este tipo de inecuaciones (factorizables), empleando una secuencia de  
182 ejercicios con grado creciente de complejidad. También consideramos factible que  
183 esta actividad pueda adaptarse para realizar el análisis de otros tipos de  
184 desigualdades, como pueden ser las cuadráticas con valor absoluto, o las de tercer  
185 grado, siguiendo un esquema similar.

## 186 5. Índice de referencias

187

### 188 Libros

- 189 • Barrera, F. y Reyes, A. (2013). *Elementos didácticos y resolución de*  
190 *problemas: formación docente en matemáticas*. México: Grupo editorial UAEH.  
191 • CONAMAT (2009). *Matemáticas simplificadas*. México: Pearson.  
192 • Duval, R. (2005) *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y*  
193 *aprendizajes intelectuales*. Colombia: Editorial de la Universidad del Valle.  
194 • Haaser, N.B., LaSalle, J.P. y Sullivan, J. A. (2009). *Análisis Matemático, curso*  
195 *de introducción*. México: Trillas.  
196 • Larson, R., Hostetler, R.P. y Edwards, B.H. (2002). *Cálculo I*. México:  
197 Ediciones Pirámide.  
198 • Rider, P.R. (1978). *Álgebra*. México: editorial Herrero.  
199 • Stewart, J. (1998). *Calculus, concept and contexts*. USA: Brooks/Cole  
200 Publishing Company.

201

### 202 Capítulo de libros

- 203 • Bayazit, I. (2006). Task Selection and task Implementation: Seven Constraints  
204 Affecting The Teacher's Instruction, en Hewitt, D. (Ed.) Proceedings of the  
205 British Society for Research into Learning Mathematics. (vol. 26, pp. 23-28).

206

207 Revistas

- 208 • Campos, M. y Torres, A. (2017). Las Tareas de Aprendizaje en la Enseñanza  
209 de las Matemáticas a Distancia. *Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia*,  
210 17, 141-149.
- 211 • Mishra, P. y Koehler, M. (2006). Technological pedagogical Content: A  
212 Framework for teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108 (6), 1017-  
213 1054.
- 214 • Moya, M. (2013). De las TICs a las TACs: la importancia de crear contenidos  
215 educativos digitales. *Revista Didáctica, Innovación y Multimedia*, 27, 1-15.
- 216 • Navarro, L.; Robles, A.; Ansaldo, J. y Castro, F. (2016). Secuencia didáctica  
217 apoyada en tecnología para la construcción del concepto de derivada en  
218 problemas de optimización. *Revista Unión*, 46, 171-187. DOI: 1815-0640.
- 219 • Oviedo, L.M., Kanahiro, A.M., Bnzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2012). Los  
220 registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula*  
221 *Universitaria*, 13, 29-36.
- 222 • Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2016) El papel de la tecnología en el proceso de la  
223 modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.  
224 *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*,  
225 19 (1), 99-124.

226



# RECURSOS EDUCATIVOS ABIERTOS PARA UN CURSO UNIVERSITARIO DE CÁLCULO INTEGRAL Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Cervantes S. Armando<sup>\*1</sup>, Rivera G Patricia,

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza,  
Lab. de Aplicaciones Computacionales

EN-POSM024

## Resumen

*Forzados por la contingencia sanitaria se planteó desarrollar el curso curricular de la Carrera de Biología de Matemáticas II, con al apoyo de materiales de uso libre. Por lo que se está desarrollando una propuesta de entorno virtual para la enseñanza-aprendizaje del cálculo integral y ecuaciones diferenciales, con base en recursos educativos abiertos, centrándose en tres grandes temas que conforman el curso: 1.- Integrales y técnicas de integración; 2.- Derivadas parciales en tres dimensiones; 3.- Ecuaciones diferenciales de primer orden. Con la experiencia de varios años impartiendo esta asignatura se buscaron y seleccionaron recursos educativos de uso libre que apoyen la forma de impartir el curso en situación de confinamiento. Cuidando que cumplan con el nivel de calidad que corresponde a un curso universitario. Se encontró material como libros y apuntes en reservorios OER, encontrando material de video muy formal y de buen nivel en Khan Academy, además de calculadoras en línea que muestran las soluciones paso a paso de ejercicios de cada uno de los temas del curso. Para el control y manejo del curso se desarrolló un aula virtual en Moodle, que funciona como reservorio de materiales y sitio de encuentro entre el profesor y los alumnos, dejando aquí los apuntes, ejemplos, ejercicios y vínculos para recibir tareas y exámenes. Se uso Edmodo, para la aclaración de dudas. Además de un Blog en WordPress, que muestra ejemplos resueltos paso a paso y con algunas notas que aclaran la estrategia de solución. En los REA se encontró una gran cantidad de recursos, que permiten responder a la emergencia de impartir este curso totalmente Mediado por Tecnología, lo cual antes de la contingencia sanitaria se veía muy difícil de lograr. Lo que permitió concentrarse en el diseño instruccional del curso.*

**Palabras clave:** OER, Entornos virtuales, Cálculo

## 1. Introducción

Los Recursos Educativos Abiertos, REA, son aquellos con una licencia que facilita su uso, reutilización y potencial adaptación o modificación sin la previa autorización del titular de los derechos de autor. Siendo esta licencia la diferencia clave con respecto a cualquier otro tipo de recursos educativos. Su poder de transformación radica en la facilidad con la que esos recursos, una vez digitalizados, se pueden compartir a través de la Internet (ONU, 2015)

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: arpacer@unam.mx

42

43 En términos coloquiales, los REA son recursos de aprendizaje, gratuitos y disponibles  
44 en Internet. Pueden tener una licencia abierta o ser de dominio público lo que permite  
45 que se puedan utilizar o reutilizar de forma gratuita. Se presentan en varios formatos:  
46 texto impreso o digital; audio, video, multimedia o hipermedia; de forma simple o en  
47 combinaciones de varios de estos. Pueden enfocarse a un solo tema o subtema de  
48 aprendizaje, una lección, una serie de lecciones, un módulo, un curso o incluso a un  
49 programa de estudio completo. Pueden servir de apoyo a una metodología o enfoque  
50 de aprendizaje específico, ya sea conductista, constructivista, conectivista, o cualquier  
51 combinación de ellos. Aunque pueden diferir en formato, estructura o enfoque,  
52 comparten una característica común: su licencia abierta.

53

54 ¿Qué implica este tipo de licencia? Con una licencia abierta, los creadores conservan  
55 la propiedad de su trabajo y pueden especificar qué tan abiertos quieren que sean sus  
56 recursos. A diferencia de los recursos comerciales, los estudiantes y profesores  
57 pueden utilizar y reutilizar los REA según lo necesiten (McGreal, 2013):

58

- 59 • Se pueden editar conforme al estilo y necesidades de los usuarios.
- 60 • Pueden agregar material nuevo a medida que se conozca o esté disponible.
- 61 • Pueden personalizarse
- 62 • Se pueden reutilizar. Por ejemplo, material de un área se puede adaptar para su uso  
63 en otras áreas del conocimiento.

64

65 Además:

- 66 • Se pueden combinar materiales para ensamblar lecciones, cursos o programas  
67 completos.
- 68 • Se puede reformatear para su uso en diferentes dispositivos, como Laptops, móviles  
69 o tabletas.
- 70 • Se pueden hacer “mezclas” combinando recursos de diferentes fuentes.

71

72 Estas características de los REA permiten pasar de crear material para cursos a solo  
73 montarlos a partir de uno o varios reservorios de REA. Ya que, en lugar de depender  
74 de libros de texto comerciales, los educadores pueden recopilar REA de una variedad  
75 de fuentes, utilizando contenido accesible de Internet y ensamblarlos en lecciones,  
76 cursos y programas.

77

78 Una buena estrategia, para empezar, es que los profesores o diseñadores de cursos  
79 comiencen a "deshuesar" sus cursos, eliminando los recursos comerciales y  
80 reemplazándolos con REA.

81

82 Para esto se deben considerar los diferentes tipos de Recursos Educativos Abiertos,  
83 los cuales pueden ser, según Eduteka, 2021:

84

85 - **Contenidos educativos:** materiales para cursos, módulos de contenido, objetos de  
86 aprendizaje, libros de texto, materiales multimedia (texto, sonido, video, imágenes,

87 animaciones), exámenes, compilaciones, publicaciones periódicas (diarios y revistas)  
88 o cursos completos (programas educativos).

89 - **Herramientas:** software para apoyar la creación, entrega (acceso), uso y  
90 mejoramiento de contenidos educativos abiertos.

91 - **Recursos de implementación:** licencias de propiedad intelectual que promuevan la  
92 publicación abierta de materiales, principios de diseño, adaptación y localización de  
93 contenido y materiales o técnicas para apoyar el acceso al conocimiento. Por lo  
94 general, quienes crean REA, pueden permitir que cualquier persona use sus  
95 materiales, los modifique, los traduzca o los mejore, así como que los comparta con  
96 otros.

97

98 Autores como Vidal y Col., 2013, han hecho algunas consideraciones, sobre este tipo  
99 de recursos:

100

101 El concepto de **contenido educativo** implica, en sí, la consideración de diferentes  
102 elementos como el propio diseño del plan o programa docente, sus objetivos y  
103 contenidos teóricos, estrategias curriculares, la evaluación y seguimiento de los  
104 procesos.

105

106 En lo relacionado con las **herramientas**, son numerosos los ejemplos que pueden  
107 apreciarse en el software educativo, pues ya está consolidado el uso de plataformas  
108 educativas que propician un intercambio fluido e infraestructura para el aprendizaje y  
109 trabajo en red.

110

111 Los desafíos del creciente acceso a Internet, combinado con la cada vez mayor  
112 infraestructura TIC en los centros educativos, generan la necesidad de apoyar, de  
113 forma planificada y deliberada, el desarrollo y la mejora constante de los planes de  
114 estudios, el diseño de los programas y asignaturas, la planificación de las sesiones de  
115 contacto con los alumnos, el desarrollo de materiales de aprendizaje y enseñanza de  
116 calidad y el diseño de evaluaciones eficaces que rompan con la tendencia tradicional  
117 de sólo calificar (ONU, 2015)

118

119 El potencial transformador que tienen los REA gira alrededor de tres posibilidades  
120 entrelazadas:

121

122 1.- *La mayor disponibilidad y buen uso de materiales de aprendizaje relevantes y de*  
123 *alta calidad puede contribuir para preparar estudiantes y educadores más productivos.*

124 2.- *El principio que permite la adaptación de los materiales facilita la construcción del*  
125 *papel del alumno como participante activo en su propio proceso educativo, dado que*  
126 *éstos aprenden mejor haciendo y creando, y no leyendo y absorbiendo pasivamente.*

127 3. *Los REA tienen potencial para aumentar la capacitación al permitir que instituciones*  
128 *y educadores accedan, a bajo costo o gratuitamente, a los medios de producción*  
129 *necesarios para desarrollar su competencia en la producción de materiales educativos*  
130 *y llevar a cabo el diseño instruccional necesario para integrar dichos materiales en*  
131 *programas de aprendizaje de alta calidad.*

132

133 Al ser la educación una práctica contextualizada, es importante fomentar el uso y  
134 combinación de Recursos Educativos Abiertos, que aunque generados en diferentes  
135 entornos, puedan contribuir a la realización de cursos mediados por tecnología.

136

137 Considerando esta última idea y forzados por la contingencia sanitaria, el reto es  
138 generar una propuesta de curso que despierte y conserve el interés del alumno, cubra  
139 todos los temas y permita la interacción profesor-alumno. Donde los materiales de  
140 consulta y apoyo didáctico son fundamentales, para evitar el uso ilegal de algunos de  
141 ellos se recurre y se sustenta el desarrollo de esta propuesta en la búsqueda selección  
142 y uso de Recursos Educativos Abiertos. Considerando como objetivo: Desarrollar una  
143 propuesta de entorno virtual para la enseñanza-aprendizaje del cálculo integral y  
144 ecuaciones diferenciales, basado en recursos educativos abiertos.

145

## 146 2. Metodología o desarrollo

147

148 Con base en el programa de la asignatura de matemáticas II que se imparte en el  
149 segundo semestre de la carrera de Biología de la FES Zaragoza, se definieron tres  
150 grandes temas que conforman el curso:

151 1.- Integrales y técnicas de integración

152 2.- Derivadas parciales

153 3.- Ecuaciones diferenciales de primer orden

154

155 Sobre estos temas se buscaron y seleccionaron recursos educativos de uso libre que  
156 apoyen la forma de impartir el curso en situación de confinamiento. Buscando que  
157 cumplan con un nivel de calidad que corresponda a un curso universitario.

158

159 Para **libros y apuntes** se realizó la búsqueda en los reservorios **OER** (*Open*  
160 *Educational Resources*) sobre los temas ya definidos. Que es donde está más  
161 organizada la información. Aunque esta opción es más adecuada para el profesor,  
162 pues la información se encuentra en inglés.

163

164 Para los alumnos se realizaron búsquedas en idioma español, encontrando que la  
165 información está más dispersa o que es información en inglés con traducción en línea.  
166 Encontrando sobre todo algunos blogs con poco soporte institucional o videos sin un  
167 soporte académico.

168

169 Se buscó material más formal encontrando bastante en el reservorio de **Khan**  
170 **Academy**, el cual ofrece ejercicios de práctica y videos de diferentes temas como  
171 apoyo al docente y que le permite a los estudiantes aprender a su propio ritmo, dentro  
172 y fuera del salón de clases. En especial se revisan los materiales de matemáticas a  
173 nivel universitario.

174 Otro recurso muy importante, que también se revisó, son las **calculadoras en línea**.  
175 Seleccionando aquellas enfocadas a la solución de derivadas, Integrales y Ecuaciones  
176 diferenciales, en especial las de acceso libre y que muestran la solución de ejercicios

177 en el paso a paso, donde hay que enfocarse a la nomenclatura que manejan para que  
178 el docente y el estudiante manejen los mismos conceptos y enfoques.

179  
180 Para darle soporte al curso, se desarrolló un aula virtual en **Moodle**, que funciona  
181 como reservorio de materiales y como sitio de encuentro entre el profesor y los  
182 alumnos en el horario de clase. Dejando aquí los apuntes, ejemplos, ejercicios y los  
183 vínculos para recibir tareas y exámenes.

184  
185 Para dejar los materiales disponibles a los alumnos se desarrolló un blog en  
186 **WordPress**, enfocado principalmente a mostrar ejemplos resueltos paso a paso y con  
187 algunas notas que aclaran la estrategia de solución.

188  
189 El seguimiento del curso se realizó a través de **Edmodo**, para la recepción y aclaración  
190 de dudas.

191  
192 La dinámica del curso fue la siguiente:

193  
194 - Previo a la clase, que tiene un horario fijo por ser una asignatura curricular que se  
195 imparte en el segundo semestre de la carrera de Biología, se manda vía correo elec-  
196 trónico el enlace para la revisión del o de los videos de apoyo al tema que se va a  
197 revisar.

198 - En el horario de clase se da un primer contacto a través de una sesión de Chat en el  
199 aula virtual del curso, para compartir comentarios sobre los vídeos revisados, bus-  
200 cando promover el debate y la expresión por escrito. También para comentar dudas o  
201 compartir información relevante al curso, como comprobar que los enlaces de las ac-  
202 tividades estén activos y confirmar fechas y horas de entrega de actividades.

203 - A partir de esta sesión se genera el enlace para una sesión Zoom, que cubre la parte  
204 presencial del curso. En estas sesiones se revisan algunos de los fundamentos teóri-  
205 cos de cada tema, pero sobre todo se hace énfasis en la solución de ejemplos, des-  
206 pués se da un tiempo para la solución de ejercicios en equipos se cierra la sesión con  
207 un proceso de retroalimentación donde se muestran los ejercicios resueltos. Durante  
208 las sesiones de ejercicios se le da información del cómo acceder a las calculadoras de  
209 derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales, enfatizando en la nomenclatura que  
210 usan las diferentes herramientas disponibles.

211 - Durante todo el curso queda abierta una clase en Edmodo para recibir dudas comen-  
212 tarios y sugerencias.

213 - Mucho del material que se revisa en los ejemplos y ejercicios está disponible en un  
214 blog desarrollado en WordPress, donde se muestra el paso a paso de la solución,  
215 acorde a lo revisado en la sesión Zoom.

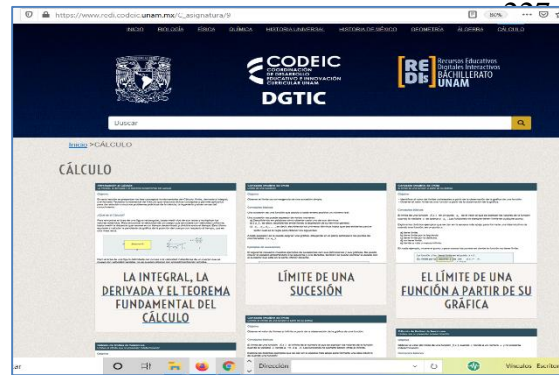
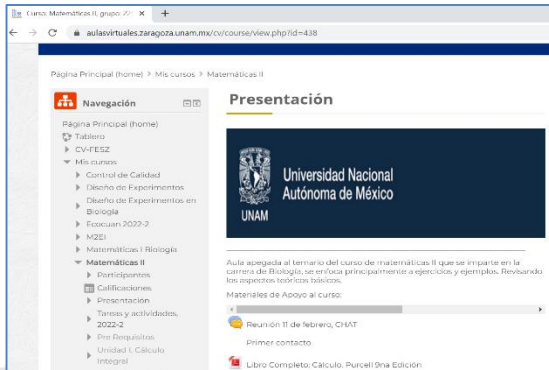
216 - Al final se hace énfasis en la aplicación de todo lo aprendido a la solución de proble-  
217 mas de interés en el área químico-biológica, para dar respuesta a la pregunta: ¿para  
218 qué les va a servir en su carrera y en su vida diaria?

219

## 220 2. Resultados y análisis

221

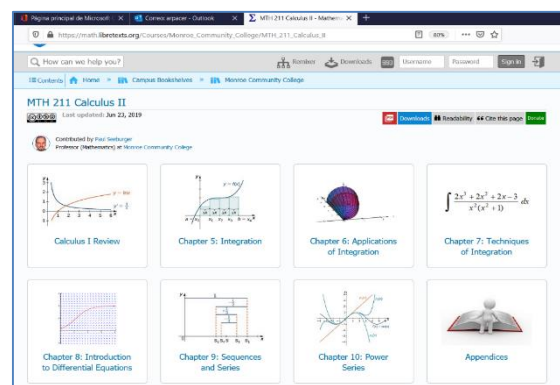
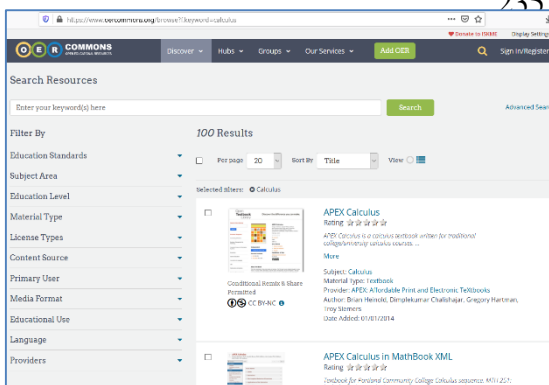
222 El elemento central es un aula virtual en Moodle, la cual funciona como el medio de  
 223 comunicación entre profesor y alumnos, así como de reservorio de los materiales  
 224 revisados en el curso y es la opción para recibir las actividades realizadas por los  
 225 alumnos (figura 1).  
 226



228 Figura 1. Aula virtual en Moodle

Figura 2. Recursos digitales UNAM

229 **Libros y apuntes:** OER (*Open Educational Resources*), es donde está más organizada  
 230 la información. Más adecuada para el profesor, pues la información se encuentra en  
 231 idioma inglés. Aunque es importante considerar una forma de evaluar la calidad de los  
 232 materiales, pues estos constituyen la parte central de una buena estrategia de estudio  
 233 (Hilton, 2016).  
 234



236 Figura 3. Recursos commons, libros.

Figura 4. Cursos

237

238 Se encontró material de vídeo, formal y de buena calidad, en el reservorio de Khan  
 239 Academy, el cual ofrece videos de diferentes temas.

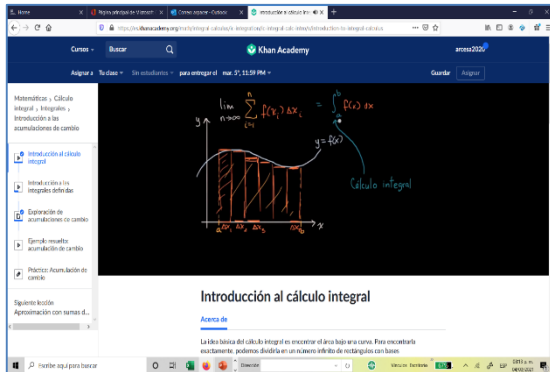


Figura 5. Kahn Academy, introducción.

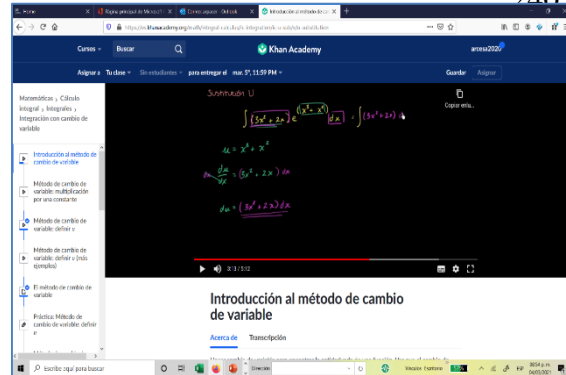


Figura 6. Kahn Academy, integración.

241 Calculadoras en línea. Derivadas, Integrales y Ecuaciones diferenciales, en especial  
 242 las de acceso libre y que muestran la solución de ejercicios en el paso a paso.  
 243  
 244

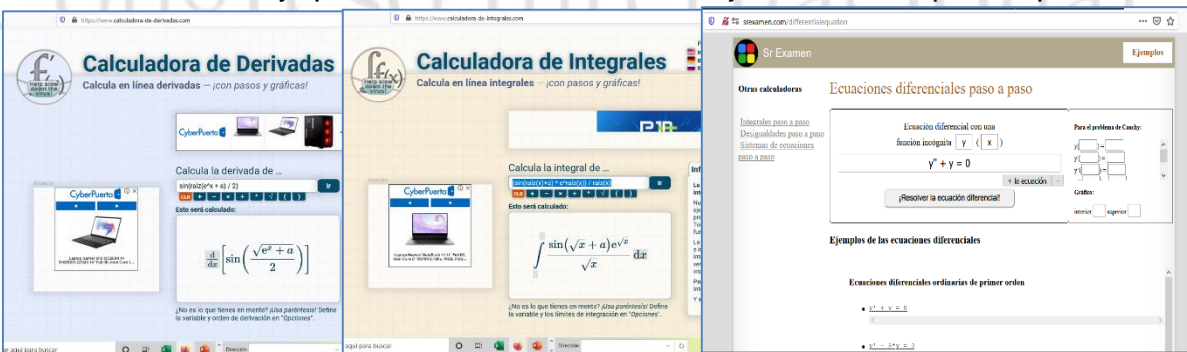


Figura 5. Calculadoras en línea.

245  
 246 Algunos enlaces de interés son:  
 247 Reservorio  
 248 [https://www.oercommons.org/browse?batch\\_size=20&sort\\_by=title&view\\_mode=summary&f.](https://www.oercommons.org/browse?batch_size=20&sort_by=title&view_mode=summary&f.keyword=calculus&f.material_types=full-course&f.sublevel=college-upper-division&f.material_types=textbook)  
 249 [keyword=calculus&f.material\\_types=full-course&f.sublevel=college-upper-](https://www.oercommons.org/browse?batch_size=20&sort_by=title&view_mode=summary&f.keyword=calculus&f.material_types=full-course&f.sublevel=college-upper-division&f.material_types=textbook)  
 250 [division&f.material\\_types=textbook](https://www.oercommons.org/browse?batch_size=20&sort_by=title&view_mode=summary&f.keyword=calculus&f.material_types=full-course&f.sublevel=college-upper-division&f.material_types=textbook)  
 251 Cálculo General  
 252 <https://www.mathsisfun.com/calculus/>  
 253 OERcommons  
 254 <https://www.oercommons.org/browse?f.keyword=calculus>  
 255 LibreTexts  
 256 [https://math.libretexts.org/Courses/Monroe\\_Community\\_College/MTH\\_211\\_Calculus\\_II](https://math.libretexts.org/Courses/Monroe_Community_College/MTH_211_Calculus_II)  
 257 Calculadora de integrales de uso libre  
 258 <https://www.calculadora-de-integrales.com/>  
 259 Calculadora de integrales de costo mínimo  
 260 <https://es.symbolab.com/solver/indefinite-integral-calculator>  
 261 Calculadora de Derivadas, incluyendo derivadas parciales  
 262 <https://www.calculadora-de-derivadas.com/>  
 263

264 Calculadora de Ecuaciones diferenciales  
265 <http://srexamen.com/differentialequation#>

266  
267 El seguimiento del curso se realizó a través de **Edmodo**, para la recepción y aclaración  
268 de dudas. Y todo el material revisado en Zoom se puso a disposición de los estudiantes  
269 en un Blog desarrollado en **WordPress**, con ejemplos resueltos paso a paso y con  
270 algunas notas que aclaran la estrategia de solución  
271 (<https://blogceta.zaragoza.unam.mx/cintegral/>)

272  
273 Los **recursos de implementación** de los REA, indudablemente pasa por la cultura y  
274 disposición del creador de compartir y aportar su obra al desarrollo del conocimiento  
275 humano y favorecer este desarrollo. Así como por la política educativa de instituciones  
276 docentes, para promover el uso de este tipo de recursos en sus procesos de  
277 enseñanza-aprendizaje y en la formación metodológica de recursos humanos para el  
278 desarrollo de objetos de aprendizaje y recursos educativos abiertos.

279  
280 En los REA encontramos una gran cantidad de recursos, que han permitido responder  
281 a la emergencia de impartir un curso de cálculo integral y ecuaciones diferenciales  
282 totalmente Mediado por Tecnología, lo cual antes de la contingencia sanitaria se veía  
283 si no imposible si muy difícil de lograr.

284  
285 Aunque para nivel universitario hay poco material con relación al existente para otros  
286 niveles como el Bachillerato. El material de licenciatura está principalmente en el  
287 idioma inglés.

288  
289 **4. Conclusiones**

290  
291 Si bien los REA encontrados permitieron conjuntar material de diferentes fuentes para  
292 cubrir todos los temas del curso. Es notoria la necesidad de organizar y sistematizar  
293 los reservorios de materiales, en idioma español.

294  
295 El material encontrado permitió concentrarse en el diseño instruccional del curso, con  
296 un aula virtual como la herramienta central para impartirlo. Permite compartir apuntes,  
297 planear actividades, recibir tareas y aplicar exámenes. Además de que la socialización  
298 del curso, a través de Edmodo, permitió compartir dudas y sugerencias de solución  
299 con la participación de todo el grupo.

300  
301 El blog desarrollado es una forma de contribuir y retribuir a los REA, generando  
302 material acorde a las necesidades y requerimientos de los estudiantes de la carrera de  
303 Biología, considerando las experiencias de alumnos y profesores.

304  
305 **Agradecimientos**

306 Al programa PAPIME, por su apoyo al proyecto PE206022

307  
308 **5. Índice de referencias**



309

310 - Hilton III, J. 2016, “Open educational resources and college textbook choices: a re-  
311 view of research on efficacy and perceptions”, *Education Tech Research Dev* 64:573–  
312 590.

313 - López G. J C., “Recursos Educativos Abiertos (REA)”, *Eduteka*, [consultado 12 de  
314 febrero 2022]. Disponible en: <http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/OER>

315 - McGreal R., 2013, “Creating, Using and Sharing Open Educational Resources”,  
316 *Commonwealth of Learning*, 6 pp. [www.fosteropenscience.eu/sites/default/files/pdf/514.pdf](http://www.fosteropenscience.eu/sites/default/files/pdf/514.pdf)

318 - ONU, 2015, “Guía Básica de Recursos Educativos Abiertos (REA)”, *Organización  
319 de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura*, París, Francia,  
320 150 pp. [www.subitus.com/wp-content/uploads/2020/10/Recursos-Educativos-Abier-  
321 tos.pdf](http://www.subitus.com/wp-content/uploads/2020/10/Recursos-Educativos-Abiertos.pdf)

322 - Vidal L. M. J.; Alfonso S. I.; Zacca G. G.; Martínez H. G, 2013, “Recursos educativos  
323 abiertos”, *Educación Médica Superior*, 27 (3): 307-320,  
324 <http://scielo.sld.cu/pdf/ems/v27n3/ems16313.pdf>

325

Congreso Internacional  
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

# VALIDACIÓN DE LA ESCALA DE RESILIENCIA EN ALUMNOS UNIVERSITARIOS

Canut Díaz Velarde Maria Eugenia<sup>1\*</sup>, Torres Ramos Ingrid

*Facultad de Estudios Superiores Acatlán UNAM. Avenida Alcanfores y San Juan, Toltetepec s/n, Sta Cruz Acatlan, 53150 Naucalpan de Juárez, México.*

**AP-POSM025**

## Resumen

**Antecedentes:** Es un instrumento que evalúa la resiliencia en los alumnos universitario de universidad pública del Estado de México durante la pandemia de COVID en el año 2021. En 1993, Wagnild y Young desarrollo la Escala de Resiliencia. Posteriormente, fue traducida y adaptada al español por Heilemann, Lee y Kury (2003), la cual está constituida por 25 reactivos en escalamiento tipo Likert. El objetivo de este estudio es validar la escala de resiliencia y conocer el nivel de resiliencia en una muestra de estudiantes universitarios en una universidad pública. **Método:** El instrumento fue contestado por 156 alumnos, que tienen una edad media de 20.5 años el 83% son hombres y el 17% son mujeres. Para su análisis se utilizó el lenguaje de programación R, SPSS y AMOS, se obtuvieron las propiedades psicométricas como es la fiabilidad y la validez, mediante el análisis Factorial Confirmatorio (AFC). **Resultados:** Se realizó el análisis factorial confirmatorio, se obtuvieron dos factores: el primer factor se refiere a la Competencia personal, con fiabilidad de  $\alpha=.858$  y el segundo factor se refiere a la Aceptación de sí mismos y de la vida, con fiabilidad  $\alpha=.681$  con cuatro ítems. **Conclusiones:** La escala muestra ha resultado ser un instrumento válido y confiable para medir la resiliencia de alumnos universitarios durante la pandemia COVID. Sin embargo, se recomienda obtener una muestra mayor.

**Palabras clave:** resiliencia, análisis, cuestionario, estudiantes, Likert, COVID-19.

## 1. Introducción

Debido a la emergencia de salud a causa del virus llamado COVID-19, se ha presentado un gran reto para el campo de la medicina, provocando un cambio drástico en las vidas de las personas y cambiando para siempre la vida desde la forma de trabajar hasta la convivencia, especialmente se ha visto afectado el proceso de enseñanza-aprendizaje en todos los niveles de estudios, causando deserción y aumentado el rezago educativo. También se ha tenido que enfrentar al proceso del duelo por la pérdida de seres queridos, con ello se han presentado momentos de angustia, dolor, depresión y caos; debiendo superar estas situaciones de manera drástica y resiliente. El objetivo de este estudio es validar la escala de resiliencia y conocer el nivel de resiliencia en una muestra de 156 estudiantes universitarios en una universidad pública. Para evaluar el nivel de resiliencia del estudiante universitario, se utilizó como instrumento la escala Wagnild y Young (1993) la cual fue traducida y adaptada al español por Heilemann, Lee y Kury (2003), la escala constituida por 25 reactivos en escalamiento tipo Likert, con 5 niveles de respuesta cuya valoración es desde 5 (totalmente de acuerdo)

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: marucanut@gmail.com Tel. 55-18-40-39-92

43 hasta 1 (totalmente en desacuerdo). La escala es calificada positivamente, con una  
44 puntuación máxima posible de 125 y una mínima de 25. En el espacio educativo este  
45 tema ha adquirido valor especial, debido a que ha transitado de áreas como la psico-  
46 logía, psiquiatría y pedagogía por la necesidad que existe de conocer la capacidad de  
47 resiliencia que tienen los alumnos, es el ejercicio de la fortaleza, como la entienden los  
48 franceses: “courage” para enfrentar todos los sucesos de la vida personal, familiar,  
49 profesional y social. Villalobos y Castelán (2006), señalan que todas las personas, así  
50 como los docentes y alumnos requieren desarrollar resiliencia. Este tema adquiere  
51 gran desarrollo después de la Segunda Guerra Mundial en donde se encontraron con  
52 individuos que presentaban diversos tipos de daños emocionales, por ello surge la  
53 preocupación de poder ayudarles. La psicología es la ciencia que busca dar apoyo  
54 para reparar el daño ocasionado al comportamiento y en la forma de funcionar de las  
55 personas. En 2000, Seligman y Csikszentmihalyi en la revista American Psychologist  
56 hacen referencia a la psicología positiva, en la que inicia el estudio sistemático de las  
57 emociones y las fortalezas humanas como la felicidad, gratitud, perdón, esperanza,  
58 amor, optimismo, flow, engagement, empatía, resiliencia, etcétera (Fredrickson 2009).  
59 Se ha registrado un aumento en las investigaciones acerca de la resiliencia, que han  
60 permitido que se generen diversos tipos de escalas para evaluar este constructo desde  
61 población de niños hasta adultos.

## 62 **Estudio de la Resiliencia**

63 El término resiliencia tiene diversas interpretaciones depende de la situación en la que  
64 se esté aplicando por ejemplo en la física y en la ingeniería de materiales se utiliza  
65 para definir la capacidad elástica de un material. Esta capacidad le permite permane-  
66 cer compacto, sin quebrarse al ser presionado por una fuerza externa o cualquier ar-  
67 tefacto, debido a su propiedad de deformarse y, al eliminar esa presión, recobrar su  
68 forma original. Algunos objetos que tiene esta propiedad son las ligas elásticas, una  
69 pelota de goma o la caña de bambú. También encontramos que este término tiene  
70 aplicación en la medicina en la rama de osteología, que refiere a la habilidad de los  
71 huesos para crecer de manera correcta después de haber padecido una fractura. En  
72 el campo socio-psicológico nace en 1982 con la publicación de Werner y Smith, en el  
73 estudio “Vulnerables pero invencibles: un estudio longitudinal de niños y jóvenes resi-  
74 lientes”. Grotberg (1995), la define como la “Capacidad del ser humano para hacer  
75 frente a las adversidades de la vida e, inclusive, ser transformado por ellas” (p.3). En  
76 el área de la Psicología, de acuerdo con Puerta & Vásquez (2012), es utilizado para  
77 describir la capacidad de los individuos de sobreponerse a condiciones de vida desfa-  
78 vorables. A pesar de todas las diferencias que se tienen acerca de este constructo  
79 investigadores como: Arratia, Medina & Borja (2008); Pereira (2007) y Polo (2009) de-  
80 finen a la resiliencia como una capacidad humana de tener éxito o sobrellevarse de un  
81 modo favorable frente a situaciones adversas o estresantes que pueden ocasionar  
82 consecuencias negativas. Para Bahena-Ayala, Arreguín-Cortés y Cervantes-Jaimes  
83 (2020), es la capacidad de resistir la adversidad y recuperarse de sucesos vitales difí-  
84 ciles. Desde el punto de vista comunitaria es la capacidad de un grupo de personas  
85 que utilizan los recursos disponibles, como la planificación urbana, el transporte, la  
86 alimentación, entre otros, para responder a los acontecimientos adversos, soportarlos

87 y recuperarse de sus efectos. La resiliencia en la educación implica, lo mismo que en  
88 física, una dinámica positiva, una capacidad de volver hacia adelante. Sin embargo, la  
89 resiliencia humana no se limita a resistir, permite la reconstrucción. La resiliencia en  
90 educación está concebida como un resorte moral, y se constituye en una cualidad de  
91 una persona que no se desanima, que no se deja abatir, que se supera a pesar de la  
92 adversidad. (Aguilar, Arjona, & Noriega, 2015). Por ello se han analizado distintos  
93 factores o fenómenos que componen una mayor o menor resiliencia identificando as-  
94 pectos internos, como la inteligencia emocional y las habilidades de socialización, y  
95 factores externos como la familia, el contexto social y las relaciones de amistad (Arra-  
96 tia, Medina & Borja, 2008). De acuerdo con Polo (2009), la resiliencia desde el punto  
97 de vista de la psicología puede ser estudiada desde dos visiones: el primero es el  
98 “riesgo” que se refiere a los puntos que pueden desencadenar un daño psicológico,  
99 biológico o social; su interés se encuentra en los factores de riesgo alrededor del indi-  
100 viduo. El segundo es el “modelo de desafío” que revisa aspectos o escudos protectores  
101 que pueden generar una defensa al posible daño o amenaza de los ya mencionados  
102 factores de riesgo y que desencadenan en el individuo la capacidad o la habilidad para  
103 superar esas adversidades. Estas visiones son complementarias, se tienen variables  
104 tanto negativas como positivas que pueden afectar al individuo, con el objetivo de lo-  
105 grar una mejor calidad de vida. Desde el punto de la psicología, con estas dos visiones  
106 pueden ser reconocidos, como factores de riesgo y factores protectores. Polo (2009),  
107 identifica que los factores protectores, son tanto de orden interno y externo al individuo,  
108 estos permiten que el individuo se desarrolle en forma óptima, y se disminuyan los re-  
109 sultados en que se tengan situaciones negativas o de peligro. Pasqualini (2010) señala  
110 que factores: individuales, familiares y los distintos aspectos sociales “facilitan el desa-  
111 rrollo del individuo y ayudan a aumentar la resistencia al riesgo” (p.113). En relación a  
112 los factores de riesgo Polo (2009) “son las acciones ya sean pasivas o activas, que  
113 involucren peligro para el bienestar del individuo o que acarreen directamente conse-  
114 cuencias negativas para su salud o comprometen aspectos de su desarrollo” (p.68).

## 115 **2. Metodología**

116 La presente investigación es un estudio instrumental, que busca analizar las propieda-  
117 des psicométricas, de la escala de Resiliencia utilizada. Se examinó la confiabilidad  
118 con el alfa de Conbrach, con el análisis de fiabilidad y se estudio la estructura de la  
119 escala con el análisis factorial exploratorio (AFE) utilizando el SPSS 26. La validez se  
120 revisó por medio del análisis factorial confirmatorio (AFC) a través del programa Rstu-  
121 dio y se obtuvo el path diagram por medio del programa de AMOS. También se deter-  
122 minó el nivel de resiliencia que tienen los alumnos universitarios de acuerdo a las res-  
123 puestas de la escala con los niveles propuestos: bajo, medio y alto.

### 124 **2.1 Participantes**

125 La muestra estuvo conformada por 156 alumnos, de una universidad pública, que tie-  
126 nen una edad media de 20.5 años el 83% son hombres y el 17% son mujeres.

### 128 **2.2 Instrumento**

129 La Escala de Resiliencia (RS), cuya estructura psicométrica se estudia en este trabajo,  
130 es una escala de autoinforme desarrollada por Wagnild y Young (1993) en su formato

131 original, como su versión en castellano (Heilemann, Lee & Kury, 2003). El instrumento  
132 es utilizado para conocer los niveles de resiliencia que se tienen frente a situaciones  
133 adversas. Dicha escala está compuesta por 25 ítems de tipo cerrado, construidos se-  
134 gún una escala de tipo Likert de 5 alternativas cuya valoración está entre 1 (Totalmente  
135 en desacuerdo) y 5 (Totalmente de acuerdo); la escala es calificada positivamente,  
136 con una puntuación máxima posible de 125 y una mínima de 25. La puntuación total  
137 de la escala se obtiene al sumar los resultados individuales de cada uno de los reactivos  
138 y se clasificaban en tres rangos de resiliencia: Nivel bajo (25-57), Medio (58-91) y  
139 Alto (92- 125).

## 140 **2.2 Procedimiento**

141 Se aplicó la escala de Resiliencia (RS), a 156 alumnos universitarios, durante la pan-  
142 demia en el periodo del 2020. La manera de obtener la respuesta fue, online a través  
143 de la plataforma de Moodle en aplicación de cuestionarios.

144 Es importante señalar que, durante el proceso de recolección de datos personales de  
145 los alumnos, se les informo que sus datos personales, estarían resguardados y se les  
146 pidió que firmaran su consentimiento para utilizar únicamente sus respuestas de  
147 acuerdo a la escala propiciada por el instrumento.

## 148 **3. Resultados y análisis**

149 Los datos estadísticos se obtuvieron por las salidas del programa SPSS 26, AMOS y  
150 por el interfaz RStudio, (paquetes Laavan, SEM y Tools). La estructura de la escala de  
151 resiliencia (RS), se examinó a través del SSPS 26, para conocer si los datos tienen la  
152 bondad de ajuste, por medio de la matriz de correlación significativa, ( $p < 0,01$ ); KMO  
153 y test de esfericidad Bartlett es .869. Estos hallazgos indican que se puede realizar el  
154 análisis factorial exploratorio (AFE), realizado por componentes principales con extrac-  
155 ción de Varimax se obtuvo la varianza total explicada para dos factores 44.786, y a  
156 través de RStudio, se manejó el Análisis Factorial Confirmatorio (AFC), utilizando el  
157 estimador MLR, siguiendo las recomendaciones de Hu & Bentler (1999), se evaluó en  
158 base a la bondad de ajuste de  $\chi^2$ , el índice de ajuste comparativo CFI es de .929 así  
159 como el índice GFI es .906 los valores reflejan un buen ajuste no así con valores de  
160 error de aproximación de raíz cuadrática media, RMSEA igual a .051, que es bajo. En  
161 este análisis se encontraron dos dimensiones: la primera Competencia personal, que  
162 esta constituido por 11 ítems (24,17,08,19,10,14,18,15,21,09,13) y la segunda Acep-  
163 tación de si mismos y de la vida, se compuso de 4 ítems (04,06, 02,03). En la Tab. 1  
164 se puede observar los ítems de cada uno de las dos dimensiones y sus correlaciones  
165 de cada ítem con el test.

166  
167  
168  
169  
170  
171  
172  
173  
174  
175  
176

**Tabla 1 Análisis Factorial Confirmatorio**

	Estimate	Std.Err	z-value	P(> z )	Std.lv	Std.all
<b>Comptper</b>						
re24	1.000				0.528	0.612
re17	1.383	0.240	5.764	0.000	0.730	0.731
re08	1.167	0.265	4.406	0.000	0.616	0.629
re19	0.733	0.157	4.674	0.000	0.387	0.573
re10	1.166	0.226	5.165	0.000	0.615	0.682
re14	0.903	0.179	5.043	0.000	0.477	0.480
re18	0.876	0.168	5.212	0.000	0.463	0.543
re15	0.757	0.190	3.989	0.000	0.400	0.485
re21	1.206	0.224	5.388	0.000	0.637	0.635
re09	0.871	0.177	4.922	0.000	0.460	0.534
re13	1.011	0.216	4.674	0.000	0.534	0.568
<b>acceptdsm</b>						
re04	1.000				0.556	0.623
re06	1.138	0.209	5.442	0.000	0.633	0.691
re02	0.889	0.260	3.421	0.001	0.495	0.518
re03	1.057	0.297	3.565	0.000	0.588	0.554

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

Utilizando el programa SPSS 26, se obtuvo la fiabilidad de la primera dimensión Competencia personal  $\alpha=.852$  con 11 ítems y la segunda dimensión Aceptación de sí mismos y de la vida  $\alpha=.681$  con 4 ítems. El diagrama se realizó por medio del programa del AMOS Fig. 1 en el que se obtuvo las dos dimensiones F1 que corresponde Competencia personal y F2 que corresponde a la Aceptación de sí mismos y de la vida. Se presentan las correlaciones con cada una de las dimensiones con los ítems, también se observa que la dimensión F1 se correlaciona con F2 en un .63 %.

Con base a la clasificación de la escala con una puntuación máxima posible de 125 y una mínima de 25. La puntuación total de los resultados individuales de cada uno de los reactivos, se clasificaron en tres rangos de nivel de resiliencia: nivel bajo (25-57), se obtuvo el 0.6% de alumnos con resiliencia, en un nivel medio (58-91), se obtuvo el 31% de alumnos con resiliencia, y en el rango alto (92- 125), se obtuvo el 68% de los alumnos con resiliencia.

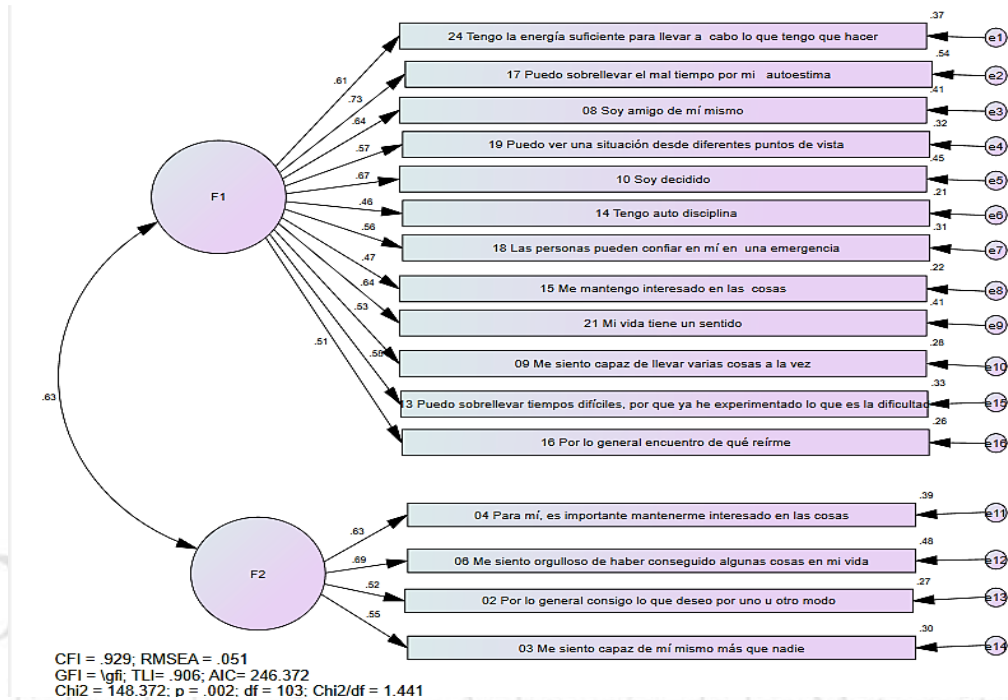


Figura 1 Path diagram escala de resiliencia

202  
 203  
 204  
 205  
 206  
 207  
 208  
 209  
 210  
 211  
 212  
 213  
 214  
 215  
 216  
 217  
 218  
 219  
 220  
 221  
 222  
 223  
 224  
 225  
 226

#### 4. Conclusiones

El objetivo de la investigación es el validar la escala autoinforme de la resiliencia (RS) en la versión en castellano desarrollada por Heilemann, Lee & Kury (2003). Para dar paso a la validación se analizaron algunos índices de bondad de ajuste como fue el KMO y la chi cuadrada que resultaron ser adecuados, para realizar el análisis factorial exploratorio (AFE), con este análisis se confirmó que la escala Resiliencia tiene dos factores, tal como fue mencionado por los autores mencionados en la investigación con varianza total 44.786. La correlación ítem-test más alta corresponde al ítem 17, con valor de .731 que hace referencia a poder sobrellevar el mal tiempo por mi autoestima y la correlación más baja es el ítem 14 tengo autodisciplina, lo que nos permite clasificar los coeficientes de correlación de moderados y altos (Delgado, Escurra & Torres, 2006). Como segundo análisis se realizó el análisis factorial confirmatorio (AFC), para poder confirmar que se tienen dos dimensiones, establecidos con la teoría y se examinó el grado de asociación entre los ítems que conforman el test y la puntuación total de la Escala de Resiliencia (Elosua 2003), se retuvieron aquellos ítems que tuvieron una correlación mayor a 0.30, por lo que se eliminaron 10 ítems. Se confirmó que se tienen dos dimensiones llamados Competencia personal y Aceptación de sí mismos y de la vida. La consistencia interna de ambos factores  $\alpha = .852$  y  $\alpha = .681$  son considerados como adecuados (Campo-Arias & Oviedo, 2008) lo que permite tener fiabilidad en el instrumento. Los factores encuentran correlacionados entre sí con una correlación de 0.63, lo que indica que los dos factores se encuentran relacionados. Los índices de bondad de ajuste como CFI

227 es muy bueno pero el RMSA es bajo. Sin embargo, los índices coinciden en los  
228 resultados con otras investigaciones realizadas.  
229 Se puede ver que el nivel de resiliencia es considerado alto en la muestra de  
230 estudiantes ya que el 68% está dentro de este rango, lo que ayuda a afirmar que los  
231 alumnos tienen buena actitud para sobrellevar la pandemia y a participar en  
232 actividades de aprendizajes.  
233 Se cree que se debe aplicar nuevamente el cuestionario con el fin de ver que ha  
234 sucedido en el nuevo ciclo escolar.  
235

## 236 5. Índice de referencias

- 237 Aguilar, G., Arjona, B., & Noriega, G. (2015). La resiliencia en la educación, la escuela  
238 y la vida. *La Resiliencia En La Educación, La Escuela y La Vida* 58, 42–48.  
239 Disponible en:  
240 <http://www.revistas.ujat.mx/index.php/perspectivas/article/view/1199/974>  
241 Arratia, N. I., Medina, J. L., & Borja, Y. (2008). Resiliencia en adolescentes mexicanos.  
242 *Enseñanza e Investigación en Psicología* 13(1), 41-52. Disponible en:  
243 <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=29213104>> ISSN 0185-1594  
244 Delgado, A. E., Ecurra, L. M., y Torres, W. (2006). *La medición en psicología y*  
245 *educación: teoría y aplicaciones*. Lima: Editorial Hozlo.  
246 Elosua, P. (2003). Sobre la validez de los tests. *Psicothema* 15(2), 315-321.  
247 Fredrickson, B. L. (2009). *Vida positiva. Cómo superar las emociones negativas y*  
248 *prosperar*. Bogotá: Norma.  
249 Hu, L.T., & Bentler, P.M. (1999). Criterios de corte para índices de ajuste en análisis  
250 de estructura de covarianza: Criterios convencionales versus nuevas  
251 alternativas. *Modelado de ecuaciones estructurales* 6(1), 1-55.  
252 Pasqualini, D. (2010). Diagnóstico de las necesidades de la población adolescente. En  
253 D. Pasqualini & A. Llorens (Eds.). *Salud y Bienestar de Adolescentes y jóvenes:*  
254 *una Mirada Integral* (pp. 110-117). Buenos Aires: OPS/OMS Universidad de  
255 Buenos Aires.  
256 Pereira, R. (febrero, 2007). *Resiliencia individual, familiar y social*. [Presentación de  
257 paper]. VIII Congreso virtual de psiquiatría, España. Disponible en:  
258 <http://www.psiquiatria.com/tratamientos/resiliencia-individual-familiar-y-social/>  
259 Polo, C. (2009). *Resiliencia: Factores protectores en adolescentes de 14 a 16 años*.  
260 Tesis de licenciatura. Buenos Aires, Argentina. Disponible en:  
261 <http://bibliotecadigital.uda.edu.ar/objetosdigitales/71/tesis-1426-resiliencia.pdf>  
262 Puerta, E., & Vásquez, M. (2012). Concepto de Resiliencia. Recuperado de Caminos  
263 para la resiliencia: [https://www.udea.edu.co/wps/wcm/connect/udea/8053e5b2-7d04-4997-9dc0-4dcada70658f/BoletA%cc%83%c2%adn+2\\_Concepto+de+Resiliencia.pdf?MOD=AJPERES](https://www.udea.edu.co/wps/wcm/connect/udea/8053e5b2-7d04-4997-9dc0-4dcada70658f/BoletA%cc%83%c2%adn+2_Concepto+de+Resiliencia.pdf?MOD=AJPERES)  
264  
265  
266  
267 Seligman, M. E. P., & Csikszentmihalyi, M. (2000). Positive psychology. An  
268 introduction. *American Psychologist* 55, 5-14.  
269 Villalobos M., & Castelán, E. (2006). Resiliencia el arte de navegar en los torrentes.  
270 *Revista Panamericana de Pedagogía* 8, 285-303.



# SERIES DE FOURIER COMO COMBINACIONES LINEALES DE UNA BASE DE DIMENSIÓN INFINITA ORTOGONAL

Sánchez Guerra José Isaac<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. Km 2.5 carretera Cuautitlán-Teoloyucan, San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcalli, Estado de México. C.P. 54714.

EN-POSM029

## Resumen

En el presente trabajo se pretende identificar a las series de Fourier como combinaciones lineales de una base infinita de funciones trigonométricas, de manera que se puedan aplicar características propias de una combinación lineal a dichas series como una alternativa para su comprensión. El estudio de estas series es importante debido a que se ha reconocido que su uso en el análisis de señales es un requisito básico en la formación de un ingeniero que estudia temas relacionados con las telecomunicaciones, tópico de gran impacto en la actualidad, en los programas de algunas de las escuelas de ingeniería en México. El marco teórico ocupado contempla algunos tópicos del álgebra lineal, especialmente espacios vectoriales y combinación lineal. La metodología empleada incluye la descripción de las combinaciones lineales y de las series de Fourier comparándolas para determinar si éstas últimas se pueden expresar como combinaciones lineales de algún espacio vectorial.

**Palabras clave:** Series, Fourier, combinación, lineal, dimensión, infinita.

## 1. Introducción

En México, durante las últimas décadas, se ha vuelto una tradición interpretar la enseñanza de la matemática en las escuelas de ingeniería como la necesidad imperante relacionada con la capacidad del ingeniero para resolver problemas muy diversos. En este sentido, una buena parte de los problemas de ingeniería hacen uso de diferentes conceptos matemáticos; el caso que se presenta en este trabajo hace referencia a la combinación lineal y las series de Fourier.

Existen algunas asignaturas que utilizan como apoyo para su estudio la asociación de conocimientos basados en propiedades físicas, propiedades observadas en la naturaleza, situaciones relacionadas con el desarrollo económico de un país, crecimiento de una población, fenómenos periódicos, etc. Sin embargo, en el estudio del álgebra lineal la mayor parte de los conceptos que se abordan en los libros de texto (recomendados como bibliografía de consulta para escuelas de ingeniería en México) es presentada a partir de definiciones formales. Dichas definiciones, en la mayoría de los casos, no parten de conocimientos previos ni de argumentos

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: joejade@hotmail.com Tel. 771-116-07-86

42 provenientes de la física o geometría, sino que se construyen preferentemente con  
43 formalidad axiomática. Esto hace, entre otras cosas, que muchos estudiantes  
44 perciban al álgebra lineal como demasiado abstracta y declaran que sus conceptos  
45 carecen de aplicación en la realidad. Por otra parte, el álgebra lineal es generalmente  
46 considerada uno de los prerrequisitos más importantes para muchos campos de  
47 matemáticas, ciencia e ingeniería.

48 En la mayoría de las escuelas de ingeniería en México, la asignatura de Álgebra  
49 Lineal es fundamental para la formación básica en matemáticas de un ingeniero. Uno  
50 de los conceptos más importantes que se aborda en esta asignatura es el de  
51 combinación lineal.

52 Possani, Trigueros, Preciado y Lozano (2010) mencionan que el álgebra lineal ha  
53 sido reconocido como un tema importante para una variedad de disciplinas, por lo  
54 que se ha convertido en un tema obligatorio en muchos programas de estudio.  
55 También se ha reconocido que el álgebra lineal es una materia difícil para la mayoría  
56 de los estudiantes. Carlson et al. (1998) han hecho investigaciones respecto a los  
57 principales obstáculos que enfrentan los estudiantes al aprender conceptos y  
58 herramientas del álgebra lineal. Su trabajo sugiere que es deseable usar problemas  
59 que vayan más allá de ejercicios simples, especialmente si provienen de otras áreas  
60 temáticas. En el presente trabajo se busca trabajar con el concepto de combinación  
61 lineal y con el de serie de Fourier para enriquecer la comprensión de ambos.

62 Por otra parte, el concepto de serie de Fourier es fundamental, en particular, para un  
63 alumno que cursa la Ingeniería en Telecomunicaciones, Sistemas y Electrónica  
64 (ITSE), que se ofrece en la Facultad de procedencia del autor, principalmente para el  
65 análisis de señales. El presente trabajo promueve una aproximación a las series de  
66 Fourier desde el punto de vista de las combinaciones lineales.

67

## 68 2. Marco teórico

69

70 Conviene recordar algunos conceptos ligados a las combinaciones lineales, tales  
71 como: espacio vectorial, independencia lineal, base y producto interno (Lay, 2001).

72 Un espacio vectorial es un conjunto no vacío  $V$  de objetos, llamados vectores, en el  
73 que están definidas dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por escalares  
74 (números reales), sujetas a diez axiomas o reglas (el número de axiomas puede  
75 cambiar según los autores que se citen).

76 La definición de Grossman y Flores (2010) para la combinación lineal en un espacio  
77 vectorial es la siguiente: “sean  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vectores en un espacio vectorial  $V$ .  
78 Entonces cualquier vector de la forma  $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = \sum_{i=1}^n a_iv_i$ , donde  
79  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son escalares, se denomina combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ” (p. 315).

80 Un conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es linealmente independiente si la solución a la  
81 ecuación vectorial  $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$  tiene como solución  $c_1 = c_2 =$   
82  $\dots = c_n = 0$ .

83 Un conjunto de vectores  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  pertenecientes a un espacio vectorial  $V$  es  
84 una base para dicho espacio vectorial si  $B$  es un conjunto linealmente independiente

85 y genera a  $V$ , es decir, cada vector  $v$  que pertenece a  $V$  se puede escribir como  
86 combinación lineal de los vectores de  $B$ .

87 Un producto interno dentro de un espacio vectorial  $V$  es una función que asocia a  
88 cada par de vectores  $u$  y  $v$  pertenecientes a  $V$  un número real  $\langle u, v \rangle$  y que satisface  
89 los siguientes axiomas, para todos  $u, v$  y  $w$  pertenecientes a  $V$  y para todo escalar  $c$ :

- 90
- 91 1.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ .
- 92 2.  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ .
- 93 3.  $\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$ .
- 94 4.  $\langle u, u \rangle \geq 0$  y  $\langle u, u \rangle = 0$  si y sólo si  $u = 0$ .

95

96 La definición de Hsu (1987) para una serie trigonométrica de Fourier es la siguiente:

97 “sea la función  $f(t)$  una función periódica de período  $T$ , la cual se puede representar  
98 por la serie trigonométrica  $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) +$   
99  $\dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$ ,

100 donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Una serie representada de esta manera se llama serie trigonométrica  
101 de Fourier” (p. 4).

102 Se puede notar que la expresión matemática de una combinación lineal y una serie  
103 trigonométrica de Fourier es similar, por lo que se podría pensar en que el conjunto  
104 de las funciones que se pueden representar por una serie trigonométrica de Fourier  
105 forman un espacio vectorial, ya que también se pueden definir las operaciones suma  
106 y multiplicación por un escalar, de manera que se cumplan los axiomas que cumple  
107 un espacio vectorial.

108 Sobre el concepto de combinación lineal, se puede probar que el conjunto de  
109 funciones  $\{1, \cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \dots, \sin(\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots\}$  es linealmente  
110 independiente y se podría considerar como una base del espacio de funciones que  
111 se pueden representar por una serie trigonométrica de Fourier, ya que dicho conjunto  
112 también genera este espacio.

113 Así mismo, se puede definir un producto interno para este espacio de la siguiente  
114 manera:  $\langle u(t), v(t) \rangle = \int_0^T u(t)v(t)dt$ , que está definido para el intervalo  $[0, T]$ . Bajo  
115 este producto interno, se puede mostrar que la base  $\{1, \cos(\omega_0 t),$   
116  $\cos(2\omega_0 t), \dots, \sin(\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots\}$  es ortogonal en dicho intervalo.

117 Tomando en cuenta el producto interno anterior, el conjunto de constantes únicas  
118  $\{a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots\}$  para cada función  $f(t)$  en este espacio, están definidas por  
119  $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)dt$ ,  $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t)dt$  y  $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t)dt$ ,  $n = 1, 2, \dots$

120 En la práctica, representar a una función  $f(t)$  con una serie de Fourier es imposible,  
121 por lo que es común representarlas con un subconjunto de la base original de la  
122 forma  $\{1, \cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \dots, \cos(k\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots, \sin(k\omega_0 t)\}$ , con  
123  $k$  definida. Dichas representaciones se pueden denotar como  $f_k(t)$ .

124 También se puede probar que si  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son las sucesiones de los coeficientes de  
125 la representación en serie de Fourier de  $f(t)$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . Este  
126 resultado nos hace plantearnos las siguientes preguntas: ¿qué valor de  $k$  es

127 conveniente tomar para que  $f_k(t)$  sea una buena aproximación de  $f(t)$ ? ¿Qué  
 128 sucede con las series de Fourier cuyos coeficientes no cumplen con este resultado?

129

130 **3. Desarrollo**

131

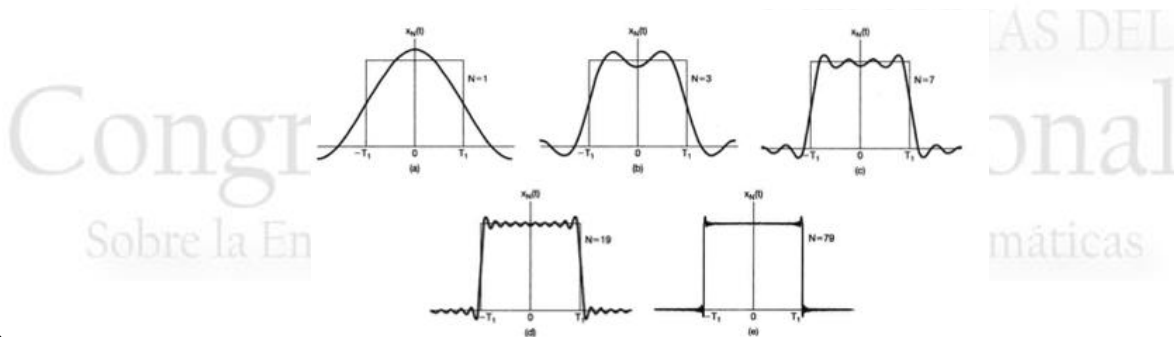
132 A manera de posibles respuestas, se muestran los siguientes ejemplos tomados de  
 133 Oppenheim (1998). El primero muestra aproximaciones a la función  $f(t) =$

134  $\begin{cases} 1 & -T_1 \leq t \leq T_1 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$ , mediante funciones  $x_N(t)$  (ver Figura 1). ¿Para qué valor de  $N$  se

135 puede decir que  $x_N(t)$  nos da una buena aproximación de  $f(t)$ ? Cuando se trabaja

136 en el análisis de señales, ¿es práctico trabajar con dicho valor de  $N$ ?

137



138

139 **Figura 1. Aproximaciones por funciones  $x_N(t)$  a una función  $f(t)$ .**

140

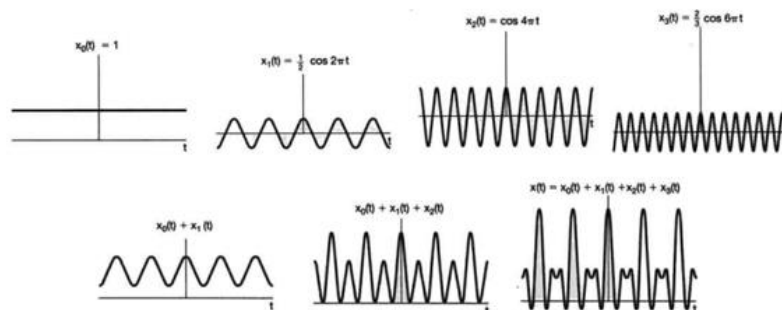
141 El segundo ejemplo muestra la construcción de la serie de Fourier de una función

142  $x(t)$  de período  $T = 1$  cuyos coeficientes son  $a_0 = 2$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = \frac{2}{3}$  y 0 para

143 todos los demás (ver Figura 2). ¿Podría ser  $x(t) = f_3(t)$  para alguna función  $f(t)$  que

144 se pueda representar mediante una serie de Fourier?

145



146

147 **Figura 2. Construcción de la función  $x(t)$ .**

148

149

150 En posteriores trabajos, se buscará dar respuesta a estas y a otras preguntas

similares.

151 Por otra parte, la convergencia de una serie de Fourier a una función  $f(t)$  se  
152 garantiza considerando las condiciones de Dirichlet, las cuales son (Hsu, 1987, p.  
153 16):

154

155 a) La función  $f(t)$  tiene un número finito de discontinuidades en un período.

156 b) La función  $f(t)$  tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.

157 c) La integral del valor absoluto de  $f(t)$  en un período es finita; es decir,

158 
$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty.$$

159

160 Como ejemplos de series de Fourier que convergen a una función, además del  
161 primer ejemplo de esta sección, se presentan los siguientes:

162 Sea  $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$ . Se puede verificar que esta función cumple con las

163 condiciones de Dirichlet, por lo que la serie de Fourier que puede representar a esta  
164 función sí converge, y es

165

166 
$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \text{sen}((2n-1)\omega_0 t).$$

167

168 Se puede aproximar dicha serie para un valor finito de la suma:

169

170 
$$f_N(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \text{sen}((2n-1)\omega_0 t).$$

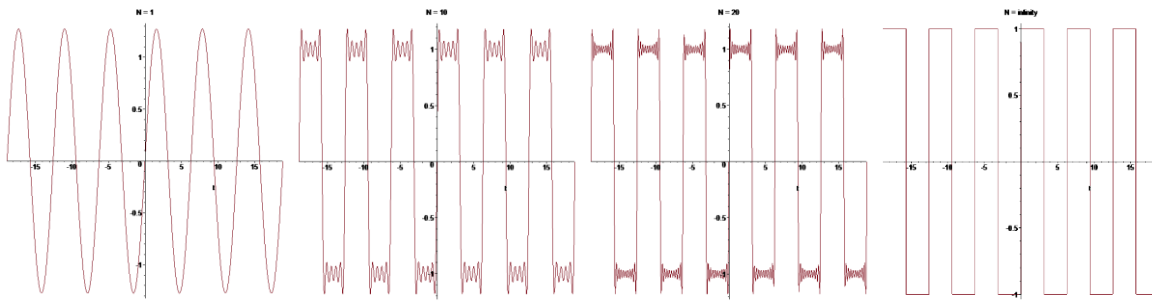
171

172 Para graficar la función y algunas de sus aproximaciones, se ocupó un programa  
173 hecho por el autor en el software matemático Maple, se tomó  $T = 2\pi$  y se graficaron  
174 4 períodos (desde  $-3T$  hasta  $3T$ ) (Figura 3):

175

176

177



178

179

**Figura 3. Aproximaciones de la función  $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$  por su serie de Fourier para distintos valores de  $N$ .**

180

181

182

183

184

185

186

187

Para la construcción de  $f_5(t)$ , por ejemplo, se necesitan 6 funciones del tipo  $x_n(t) = a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sen(n\omega_0 t)$ , las correspondientes a los valores  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Es decir,  $f_5(t)$  se puede ver como combinación lineal de las funciones  $\{1, \cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \cos(3\omega_0 t), \cos(4\omega_0 t), \cos(5\omega_0 t), \sen(\omega_0 t), \sen(2\omega_0 t), \sen(3\omega_0 t), \sen(4\omega_0 t), \sen(5\omega_0 t)\}$  de la siguiente forma:

188

189

190

191

$$f_5(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + x_5(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sen(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sen(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + b_3 \sen(3\omega_0 t) + a_4 \cos(4\omega_0 t) + b_4 \sen(4\omega_0 t) + a_5 \cos(5\omega_0 t) + b_5 \sen(5\omega_0 t).$$

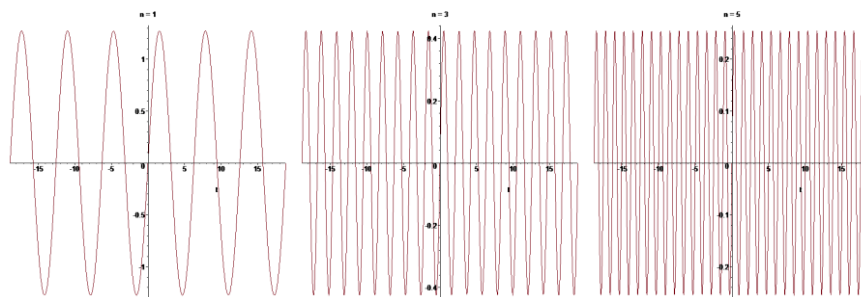
192

193

194

195

Pero, para este caso, sólo  $b_1, b_3$  y  $b_5$  no son cero, por lo que  $f_5(t)$  se depende sólo de  $b_1 \sen(\omega_0 t), b_3 \sen(3\omega_0 t)$  y  $b_5 \sen(5\omega_0 t)$ , con  $b_1 = \frac{4}{\pi}, b_3 = \frac{4}{3\pi}$  y  $b_5 = \frac{4}{5\pi}$ , cuyas gráficas se muestran en la Figura 4:



196

197

**Figura 4. Componentes de  $f_5(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$ .**

198

199 Ahora, sea  $f(t) = e^t$  con período  $2\pi$  en el intervalo  $(-\pi, \pi)$ . También esta función  
 200 cumple con las condiciones de Dirichlet, por lo que la serie de Fourier que puede  
 201 representar a esta función sí converge. Esta serie es

202

$$203 \quad f(t) = \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + 1)} (\cos(nt) - n\operatorname{sen}(nt)) \right].$$

204

205 Se puede aproximar dicha serie para un valor finito de la suma:

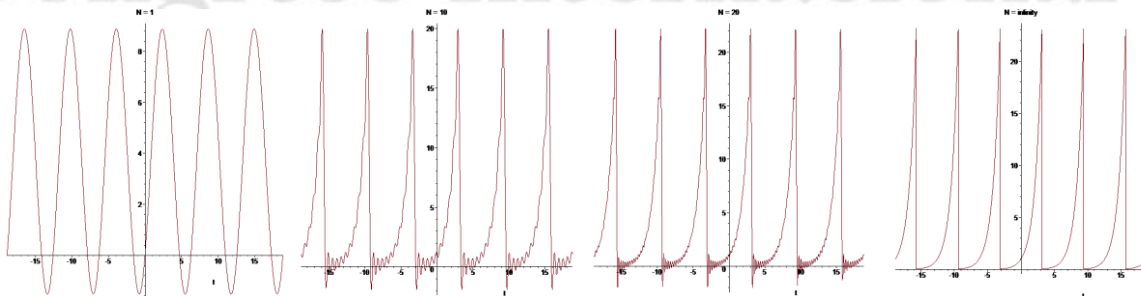
206

$$207 \quad f_N(t) = \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{(n^2 + 1)} (\cos(nt) - n\operatorname{sen}(nt)) \right].$$

208

209 Graficando 4 períodos de la función (desde  $-6\pi$  hasta  $6\pi$ ), se tiene (Figura 5):

210



211

212

213 **Figura 5. Aproximaciones de la función  $f(t) = e^t$  por su serie de Fourier para distintos valores**  
 214 **de  $N$ .**

215

216 Para la construcción de  $f_5(t)$  se necesitan 6 funciones del tipo  $x_n(t) =$   
 217  $a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$ , las correspondientes a los valores  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Es  
 218 decir,  $f_5(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + x_5(t)$ , donde, para este caso,

219

$$220 \quad x_0 = \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}, \quad x_1 = -\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \cos(t) + \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} \operatorname{sen}(t),$$

$$221 \quad x_2 = \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{5\pi} \cos(2t) - \frac{4\operatorname{senh}(\pi)}{5\pi} \operatorname{sen}(2t), \quad x_3 = -\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{5\pi} \cos(3t) + \frac{3\operatorname{senh}(\pi)}{5\pi} \operatorname{sen}(3t),$$

$$222 \quad x_4 = \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{17\pi} \cos(4t) - \frac{8\operatorname{senh}(\pi)}{17\pi} \operatorname{sen}(4t), \quad x_5 = -\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{13\pi} \cos(5t) + \frac{5\operatorname{senh}(\pi)}{13\pi} \operatorname{sen}(5t).$$

223

224 Cuyas gráficas se muestran en la Figura 6:

225

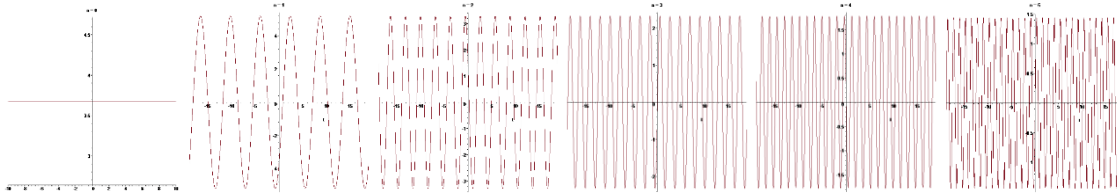


Figura 6. Componentes de  $f_5(t) = e^t$ .

226  
227  
228  
229

#### 4. Resultados y análisis

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

En este trabajo se contextualiza el concepto de combinación lineal relacionándolo con el análisis de las series de Fourier para aplicarlo, por ejemplo, al análisis de señales.

Asimismo, aunque no es el objetivo principal de este trabajo, se muestra el uso de software matemático para la graficación de funciones. En este caso, se graficaron algunas componentes  $x_n$  para una aproximación específica de  $f(t)$  y su suma, lo que permite visualizar cómo las aproximaciones  $f_N(t)$  son cada vez más parecidas a  $f(t)$ .

241

#### 5. Conclusiones.

242

243

244

245

246

A modo de conclusión, se puede decir que la serie de Fourier de una función periódica puede ser vista como un elemento de un espacio vectorial de dimensión infinita al ser una combinación lineal de una base infinita.

247

#### 5. Índice de referencias

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., Porter, A. D., Watkins, A. E., Watkins, W. (Eds.) (1998). Resources for Teaching Linear Algebra. *The Mathematical Gazette*. 82 (494). 339 – 341.

Grossman, S. I. y Flores, J. J. (2010). *Álgebra Lineal* (7ma ed.). México: McGraw Hill.

Hsu, H. P. (1987). *Análisis de Fourier*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.

Lay, D. C. (2001). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. México: Prentice Hall.

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. y Nawab, S. H. (1998). *Señales y sistemas* (2da ed.). México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications* 432, 2125–2140.



# UNA INVESTIGACIÓN SOBRE ENFOQUES DE APRENDIZAJE PROFUNDO

García León Omar<sup>1\*</sup>, Aguilar Márquez Armando, León Rodríguez Frida, Pineda Becerril Miguel de Nazareth y Rosas Fonseca Rosalba Nancy

Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Av. Teoloyucan Km 2.5, San Sebastian Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, México.

AP-POSM031

## Resumen

Recientemente el aprendizaje profundo ha obtenido un gran éxito en una variedad de dominios de aplicaciones. Este nuevo campo del aprendizaje automatizado ha crecido rápidamente y ha sido aplicado a la mayoría de los dominios de aplicaciones tradicionales, así como a algunas áreas nuevas que presentan más oportunidades. Se han propuesto diferentes métodos basados en diferentes categorías de aprendizaje, incluido el aprendizaje supervisado, semi-supervisado y no supervisado. Los resultados muestran un rendimiento de vanguardia utilizando el aprendizaje profundo en comparación con los enfoques tradicionales de aprendizaje automático en los campos del procesamiento de imágenes, visión por computadora, reconocimiento de voz, traducción automática, arte, imágenes médicas, procesamiento de información médica, robótica y control, bioinformática, procesamiento del lenguaje natural (PNL), ciberseguridad, etc.

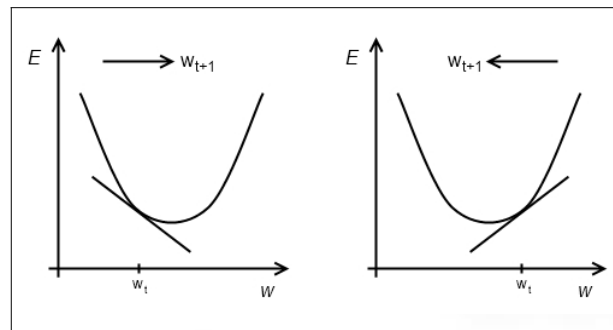
**Palabras clave:** Redes Neuronales, Aprendizaje profundo, Inteligencia Artificial, Modelos No Paramétricos, Modelos Estadísticos.

## 1. Introducción

Las redes neuronales artificiales se aplican en varias situaciones. En particular el planteamiento del problema es descubrir que relación funcional existe entre covariables para lo que se aplica un proceso de entrenamiento iterativo. Su entrenamiento se resume en ensayar iterativamente con perceptrones multicapa en el contexto de análisis de regresión, es decir, para aproximar las relaciones funcionales entre covariables y variables de respuesta se propone buscar la relación entre variables. Por tanto, las redes neuronales se utilizan como extensiones de modelos lineales generalizados. El algoritmo de retropropagación proporciona una opción personalizada de activación y función de error Fig. (1). Teóricamente se puede incluir un número arbitrario de covariables y variables de respuesta, así como de capas

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: ogarciale@comunidad.unam.mx Tel. 56-23-18-81, Fax 56-23-18-86

41 ocultas. El documento ofrece una breve introducción a los perceptrones multicapa y la  
 42 retropropagación resiliente. Los resultados muestran que las redes neuronales se  
 43 ajustan a los datos durante el proceso de entrenamiento, puede manejar un número  
 44 arbitrario de variables de entrada y variables de respuesta, no es necesario  
 45 preespecificar el tipo de relación entre las covariables.  
 46



47  
 48 **Figura 1.- La idea básica del algoritmo de retropropagación ilustrada para una función de error univariante.**

49  
 50 Breve historia de las redes neuronales que destacan eventos clave:

- 51
- 52 ▪ 1944: McCulloch y Pitts muestran que las neuronas se pueden combinar para  
 53 construir una máquina de Turing (usando AND, OR y NOT) (McCulloch 1944).
- 54
- 55 ▪ 1958: Rosenblatt muestra que los perceptrones convergerán si se puede  
 56 representar lo que están tratando de aprender (Rosenblatt 1958).
- 57
- 58 ▪ 1969: Minsky y Papert muestran las limitaciones del perceptrón, matando la  
 59 investigación en redes neuronales durante una década (Marvin 1969).
- 60
- 61 ▪ 1985: El algoritmo de retropropagación de Geoffrey Hinton et al. (Hinton 1985)  
 62 revitaliza el campo.
- 63
- 64 ▪ 1988: Neocognitron: una red neuronal jerárquica capaz de reconocer patrones  
 65 visuales (Fukushima 1988)
- 66
- 67 ▪ 1998: CNN con retropropagación para análisis de documentos de Yan LeCun  
 68 (LeCun 1988).
- 69
- 70 ▪ 2006: El laboratorio de Hinton resuelve el problema de formación de DNN  
 71 (Hinton 2006a), (Hinton 2006b).
- 72
- 73 ▪ 2012: AlexNet de Alex Krizhevsky en 2012 (Krizhevsky 2012).
- 74

75 Una desventaja de la retropropagación es que puede tomar una gran cantidad de  
76 iteraciones para converger a la solución deseada. Una alternativa a la  
77 retropropagación que se ha utilizado en la clasificación es la red neuronal probabilística  
78 (PNN) (Specht (1988), (1990), (1991)), que implica el aprendizaje de un solo paso y se  
79 puede implementar directamente en la arquitectura de la red neuronal.

80

81 Existen dos componentes básicos en una red neuronal que son las dos capas básicas  
82 de una red: La capa de inputs (primera capa) que consiste de todas las covariantes en  
83 neuronas separadas y la capa de outputs (última capa) que consiste de la variable o  
84 las variables respuesta ( $y$ ). Mediante un algoritmo iterativo entre estas dos capas se  
85 ajustan los pesos ( $w_i$ ) que conectan cada capa, de manera que el error entre la  
86 variables respuesta ( $y$ ) y la predicción  $o(x)$  sea mínimo. Todo este procedimiento de  
87 entrenamiento se puede realizar en línea Baluja (1995).

88

## 89 2. Desarrollo

90

91 Tipos de enfoques de DL:

92

93 Al igual que el aprendizaje automático, los enfoques de aprendizaje profundo se  
94 pueden clasificar de la siguiente manera:

95

96 Supervisado, Semi-supervisado o Parcialmente supervisado y No supervisado.  
97 Además, existe otra categoría de aprendizaje llamada Aprendizaje por refuerzo  
98 (Reinforcement Learning RL) o RL profundo ( Deep Reinforcement Learning DRL) que  
99 a menudo se discuten bajo el alcance de semi supervisado o, a veces, enfoques de  
100 aprendizaje sin supervisión .

101

### 102 2.1 Aprendizaje supervisado

103

104 El aprendizaje supervisado es una técnica de aprendizaje que utiliza etiquetas  
105 datos. En el caso de enfoques DL supervisados, el entorno tiene un conjunto de  
106 entradas y salidas correspondientes  $(x_t, y_t) \sim \rho$ . Por ejemplo, si para la entrada  $x_t$ , el  
107 agente inteligente predice  $\hat{y} = t f(x)$ , el agente recibirá un valor de pérdida  $l(y, \hat{y})$ .

108

109 El agente luego modificará iterativamente los parámetros de la red para una mejor  
110 aproximación de las salidas deseadas. Después de un entrenamiento exitoso, el  
111 agente podrá obtener las respuestas correctas a las preguntas del entorno. Existen  
112 diferentes enfoques de aprendizaje supervisado para aprendizaje profundo, incluidas  
113 las redes neuronales profundas (Deep Neural Network DNN), las redes neuronales  
114 convolucionales (CNN), las redes neuronales recurrentes (RNN), incluida la memoria  
115 a corto plazo a largo plazo (LSTM) y las unidades recurrentes cerradas (GRU).

116

117

118

## 119 2.2 Aprendizaje semi-supervisado

120

121 El aprendizaje semi-supervisado es el aprendizaje que se produce sobre la base de  
122 conjuntos de datos parcialmente etiquetados (a menudo también llamado aprendizaje  
123 por refuerzo). La sección 8 de este estudio examina los enfoques de DRL. En algunos  
124 casos, DRL y Redes Adversarias Generativas (Generative Adversarial Networks GAN)  
125 se utilizan como técnicas de aprendizaje semi-supervisado. Además, los RNN,  
126 incluidos LSTM y GRU, también se utilizan para el aprendizaje semi-supervisado.

127

## 128 2.3 Aprendizaje no supervisado

129

130 Los sistemas de aprendizaje no supervisados son aquellos que pueden hacerlo sin la  
131 presencia de etiquetas de datos. En este caso, el agente aprende la representación  
132 interna o características importantes para descubrir relaciones o estructuras  
133 desconocidas dentro de los datos de entrada. A menudo, la agrupación, la reducción  
134 de la dimensionalidad y las técnicas generativas se consideran enfoques de  
135 aprendizaje no supervisados. Hay varios miembros de la familia del aprendizaje  
136 profundo que son buenos para la agrupación en clústeres y la reducción de  
137 dimensionalidad no lineal, incluidos Codificadores automáticos (AE), máquinas  
138 Boltzmann restringidas (RBM) y GAN de reciente desarrollo. Además, los RNN, como  
139 LSTM y RL, también se utilizan para el aprendizaje no supervisado en muchos  
140 dominios de aplicación Arulkumaran(2017).

141

## 142 2.4 Aprendizaje por refuerzo profundo (DRL)

143

144 El aprendizaje por refuerzo profundo es una técnica de aprendizaje para su uso en  
145 entornos desconocidos. DRL comenzó en 2013 con la Mente Google Deep (Mnih  
146 2013), (Mnih 2015). A partir de entonces, se han desarrollado varios métodos  
147 avanzados basado en RL. Aquí se presenta un ejemplo de RL: si entradas de muestras  
148 ambientales:  $x \sim \rho$ , el agente predice:  $\hat{y} = f(x)$ , el agente recibe el costo:  $c \sim P(c | x, \hat{y})$   
149 donde P es un distribución de probabilidad desconocida, el entorno entonces hace una  
150 pregunta a un agente y da una puntuación (con ruido) como respuesta. A veces, este  
151 enfoque también se denomina aprendizaje semi-supervisado. Existen muchas  
152 técnicas semi-supervisadas y no supervisadas que se han implementado en base a  
153 este concepto.

154

## 155 3. Resultados y análisis

156

### 157 3.1 Descenso de gradiente

158

159 El PMC calcula la ecuación (1):

160

161

$$o(x) = f\left(w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i\right) = f(w_0 + \mathbf{w}^T \mathbf{x})$$

$o(\mathbf{x})$ = Pronóstico  
 $w_0$ = Intersección  
 $\mathbf{w}=(w_1, \dots, w_n)$   
 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$

162  
 163  
 164  
 165  
 166

**Ecuación 1**

167 donde  $w_0$  denota la intersección,  $\mathbf{w}=(w_1, \dots, w_n)$  el vector que consta de todos los pesos  
 168 sinápticos sin la intersección y  $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$  el vector de todas las covariables. Esta  
 169 función es matemáticamente equivalente a la de MLG (Modelos Lineales  
 170 Generalizados) con función de enlace  $f^{-1}$ . Por lo tanto, todos los pesos ( $w_0, w_1$ )  
 171 calculados en este caso son equivalentes a los parámetros de regresión del MLG.

172  
 173  
 174  
 175

Para aumentar la flexibilidad del modelado, se pueden incluir capas ocultas. Sin embargo, Hornik et al. (1989) demostró que una capa oculta es suficiente para modelar cualquier función continua a intervalos. Tal PMC con una capa oculta que consta de  $\nu$  neuronas ocultas calcula la ecuación (2):

$$\alpha(\mathbf{x}) = f\left(w_0 + \sum_{j=1}^J w_j \cdot f\left(w_{0j} + \sum_{i=1}^n w_{ij} x_i\right)\right)$$

$$= f\left(w_0 + \sum_{j=1}^J w_j \cdot f\left(w_{0j} + \mathbf{w}_j^T \mathbf{x}\right)\right)$$

$\alpha(\mathbf{x})$ = Predicción  
 $w_0$ = Intersección  
 $w_{0j}$ = Intersección en neuronal  $j^{\text{th}}$   
 $\mathbf{w}_j = (w_{1j}, \dots, w_{nj})$   
 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$

**Ecuación 2**

183  
 184  
 185  
 186  
 187

donde  $w_0$  denota la intersección de la neurona de salida y  $w_{0j}$  la intersección de la neurona oculta. Además  $w_j$ , denota el peso sináptico correspondiente a la sinapsis que comienza en la  $j^{\text{th}}$  neurona oculta.

188  
 189  
 190  
 191

El enfoque de descenso de gradiente es un algoritmo de optimización de primer orden que se utiliza para encontrar los mínimos locales de una función objetivo. Esto se ha utilizado para entrenar a las RNA en las últimas dos décadas con éxito. El algoritmo I explica el concepto de descenso de gradiente:

192  
 193  
 194  
 195  
 196  
 197  
 198  
 199  
 200

---

Algoritmo I. Gradiente de descenso

---

**Entradas:** función de pérdida  $\varepsilon$ , tasa de aprendizaje  $\eta$ , conjunto de datos  $X$ ,  $y$  y el modelo

$F(\theta, x)$

**Salidas:** Óptimo  $\theta$  que minimiza  $\varepsilon$

**REPETIR** hasta converger:

201  $\tilde{y} = F(\theta, x)$   
202  $\theta = \theta - \eta \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \epsilon(y, \tilde{y})}{\partial \theta}$

203  
204 **FIN**  
205

---

### 206 3.2. Descenso de gradiente estocástico (SGD)

207 Dado que un tiempo de entrenamiento prolongado es el principal inconveniente del  
208 enfoque tradicional de descenso en gradiente, el enfoque SGD se utiliza para entrenar  
209 redes neuronales profundas (DNN) (Bottou 2012). Algoritmo II explica SGD en detalle

210  
211 **Algoritmo II. Descenso de gradiente estocástico (Stochastic Gradient Descent**  
212 **SGD)**

---

213  
214 **Entradas:** función de pérdida  $\epsilon$ , tasa de aprendizaje  $\eta$ , conjunto de datos  $X$ ,  $y$  y  
215 el modelo  $F(\theta, x)$

216  
217 **Salidas:** Óptimo  $\theta$  que minimiza  $\epsilon$

218  
219 **REPETIR** hasta converger:

220  
221 Revolver  $X$ ,  $y$ ;

222  
223 **PARA** cada lote de  $x_i$ ,  $y_i$  en  $X$ , y **HACER**

224  
225  $\tilde{y} = F(\theta, x_i)$ ;

226  
227  $\theta = \theta - \eta \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \epsilon(y, \tilde{y})}{\partial \theta}$

228  
229 **FIN**  
230

---

231 Una vez que se entrena adecuadamente, un modelo de red neuronal se puede usar  
232 en el análisis numérico, exactamente de la misma manera que un modelo matemático  
233 convencional se utiliza. Ya que el proceso iterativo en el que se basan redes  
234 neuronales descubre que relaciones existen entre las variables dependientes he  
235 independientes, una vez que las redes han sido entrenadas, las redes neuronal son  
236 capaces de inferir relaciones y asociaciones complejas lineales o no lineales a partir  
237 de dos o más covariables, son robustas, son tolerantes al ruido y a las fallas, son auto  
238 organizadas y adaptables, y son capaces de generalizar. Se han utilizado en  
239 problemas de reconocimiento de patrones. Más recientemente, se ha propuesto el uso

240 de redes neuronales entrenadas para modelar la relación entre covariables y como  
241 una alternativa a los enfoques de modelado matemático convencionales como  
242 regresión lineal múltiple, análisis discriminante y otros métodos de aprendizaje de  
243 máquina.

244

Durante un proceso de entrenamiento iterativo se repiten los siguientes pasos:

246

-Los parámetros de una red neuronal son sus pesos ( $w_i$ ). Por lo general, todos  
247 los pesos ( $w_i$ ) se inicializan con valores aleatorios extraídos de una  
248 distribución normal estándar.

249

250

-Se calcula (con la red neuronal) las salidas  $o(\mathbf{x})$  con las entradas dadas  
251 ( $\mathbf{x}$ ) y los pesos dados ( $w_i$ ). Si el proceso de entrenamiento no se ha  
252 completado, el valor predicho  $o(\mathbf{x})$  diferirá del observado ( $\mathbf{y}$ ).

253

254

-Se calcula la función del error ( $E$ ),

255

-Como la suma de los cuadrados de error (SSE)

256

-O la entropía cruzada

257

-Todas las ponderaciones ( $w_i$ ) se adaptan para que la predicción  $o(\mathbf{x})$  se  
258 acerque a el valor observado ( $\mathbf{y}$ ).

259

260

La red neuronal calcula una salida  $o(\mathbf{x})$  para entradas  $\mathbf{x}$  dadas y pesos  
261 actuales ( $w_i$ ). Si el proceso de entrenamiento aún no se ha completado, la  
262 salida pronosticada o diferirá de la salida observada ( $\mathbf{y}$ ) y el proceso iterativo  
263 continuará hasta que el algoritmo converja o se alcancen la cantidad de  
264 iteraciones establecida por el usuario.

265

#### 266 4. Conclusiones

267

268 Los algoritmos heurísticos producen soluciones de buena calidad, con requerimientos  
269 computacionales bajos, es decir, requerimientos de poca memoria y tiempo de  
270 computo, son capaces de resolver problemas de diversas disciplinas como visión por  
271 computadora, reconocimiento de voz, traducción automática, arte, imágenes médicas,  
272 procesamiento de información médica. Son capaces de aprender relaciones y  
273 asociaciones complejas no lineales de un gran cuerpo de datos, y tienen muchas  
274 características deseables para aplicaciones de ingeniería: son robustas, son tolerantes  
275 al ruido y a las fallas, se auto-organizan y se adaptan, y son capaces de generalizar.  
276 Se han utilizado con mucho éxito en una amplia gama de problemas de reconocimiento  
277 de patrones Günther (2010).

278

279

280

281

## 282 5. Índice de referencias

283

284 Ackley, D. H., Hinton, G. E., & Sejnowski, T. J. (1985). A learning algorithm for  
285 Boltzmann machines. *Cognitive science*, 9(1), 147-169.

286 Arulkumaran, K., Deisenroth, M. P., Brundage, M., & Bharath, A. A. (2017). A brief  
287 survey of deep reinforcement learning. *arXiv preprint arXiv:1708.05866*.

288 ISO 690

289 Baluja, S., & Pomerleau, D. (1995). Encouraging distributed input reliance in spatially  
290 constrained artificial neural networks: Applications to visual scene analysis and control,  
291 20(1), 23-38.

292 Bottou, L. (2012). Stochastic gradient descent tricks. In *Neural networks: Tricks of the*  
293 *trade* (pp. 421-436). Springer, Berlin, Heidelberg.

294 Fitch, F. B. (1944). McCulloch Warren S. and Pitts Walter. A logical calculus of the  
295 ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of mathematical biophysics*, vol. 5, pp. 115–  
296 133. *Journal of Symbolic Logic*, 9(2).

297 Fukushima, K. (1988). Neocognitron: A hierarchical neural network capable of visual  
298 pattern recognition. *Neural networks*, 1(2), 119-130.

299 Günther, F., & Fritsch, S. (2010). neuralnet: Training of neural networks. *The R journal*,  
300 2(1), 30-38.

301 Hinton, G. E., Osindero, S., & Teh, Y. W. (2006). A fast learning algorithm for deep  
302 belief nets. *Neural computation*, 18(7), 1527-1554.

303 Hinton, G. E., & Salakhutdinov, R. R. (2006). Reducing the dimensionality of data with  
304 neural networks. *science*, 313(5786), 504-507.

305 Hornik, K., Stinchcombe, M., & White, H. (1989). Multilayer feedforward networks are  
306 universal approximators. *Neural networks*, 2(5), 359-366.

307 Krizhevsky, A., Sutskever, I., & Hinton, G. E. (2012). Imagenet classification with deep  
308 convolutional neural networks. *Advances in neural information processing systems*, 25.

309 LeCun, Y., Bottou, L., Bengio, Y., & Haffner, P. (1998). Gradient-based learning applied  
310 to document recognition. *Proceedings of the IEEE*, 86(11), 2278-2324.

311 Marvin, M., & Seymour, A. P. (1969). Perceptrons.

312 Mnih, V., Kavukcuoglu, K., Silver, D., Rusu, A. A., Veness, J., Bellemare, M. G., &  
313 Hassabis, D. (2015). Human-level control through deep reinforcement learning. *nature*,  
314 518(7540), 529-533.

315 Mnih, V., Kavukcuoglu, K., Silver, D., Graves, A., Antonoglou, I., Wierstra, D., &  
316 Riedmiller, M. (2013). Playing atari with deep reinforcement learning. *arXiv preprint*  
317 *arXiv:1312.5602*.

318 Rosenblatt, F. (1958). The perceptron: a probabilistic model for information storage and  
319 organization in the brain. *Psychological review*, 65(6), 386

320 Specht, D. F. (1988, July). Probabilistic neural networks for classification, mapping, or  
321 associative memory. In *ICNN* (pp. 525-532).

322 Specht, D. F. (1990). Probabilistic neural networks. *Neural networks*, 3(1), 109-118





- 323 Specht, D. F. (1991). A general regression neural network. IEEE transactions on neural  
324 networks, 2(6), 568-576

MEMORIAS DEL  
Congreso Internacional  
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

## MERCADOS LABORALES LOCALES Y MOVILIDAD HUMANA

García León Omar<sup>1\*</sup>, Pineda Becerril Miguel de Nazareth, Flores Pérez Judith Mayte,  
Ramírez Montes Pedro Ivan y Rosas Fonseca Rosalba Nancy

*Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Av. Teoloyucan Km 2.5, San Sebastian  
Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, México.*

**AP-POSM032**

### Resumen

*El objetivo de este trabajo es analizar la evolución de los Mercados Laborales Locales (MLL) en España entre 2001 y 2011 de 11 subgrupos de población (género, 4 actividades, 4 sectores y población general). Se utiliza un proceso iterativo algorítmico con N-1 pasos para examinar los datos de desplazamiento para los 11 subgrupos y rastrear MLL en ambos años maximizando la autocontención de los trabajos (número de trabajos ocupados por residentes del área y número de residentes que trabajan en misma área) de las áreas generadas. Se calculan cuatro índices para cada MLL, y la variación de estos cuatro índices entre 2001 y 2011 nos permite clasificarlos como áreas que pasan de áreas con excedentes de empleo a áreas deficitarias, o viceversa. La evidencia indica un aumento de la movilidad, diferencia en las tasas de movilidad según las características de los subgrupos y la conversión de mercados excedentes en empleo a mercados deficitarios. Estas tendencias dan paso a áreas funcionales más amplias y niveles más bajos de autocontención que se reflejan en la duración del viaje al trabajo. Esto impacta en la calidad de vida, la cohesión social y la sostenibilidad de los territorios.*

**Palabras clave:** Mercados Laborales Locales, Empleo, Movilidad, Política Laboral, Trabajadores Inmigrantes.

### 1. Introducción

Este artículo contribuye al conocimiento actual sobre la evolución del mercado laboral y la movilidad laboral al estudiar el cambio en el tiempo de la elección del lugar de trabajo y en la movilidad de diferentes segmentos de la población. Existen estudios de la evolución de regiones específicas de sector y género a lo largo del tiempo para otros países (Farmer & Fotheringham, 2011; Green, Coombes, & Owen, 1986; Persyn, 2011). Este estudio contribuye a la literatura existente al examinar 11 subgrupos en toda España. En el contexto de la movilidad laboral, este documento aborda dos

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: [ogarciale@comunidad.unam.mx](mailto:ogarciale@comunidad.unam.mx) Tel. 56-23-18-81, Fax 56-23-18-86

39 temas: la diferencia en la preferencia de lugar de trabajo para diferentes subgrupos de  
40 la población y el cambio en la movilidad a lo largo del tiempo. Desde la perspectiva de  
41 la evolución del mercado laboral, este estudio puede ayudar a generar conocimiento  
42 sobre dónde ubicar políticas e inversiones diseñadas para estimular el crecimiento del  
43 empleo a través de esfuerzos enfocados en regiones que muestran déficit de empleo.  
44 Y si estas políticas son compatibles con las preferencias y la movilidad  
45 comportamientos de diferentes subgrupos de la población, también el estudio  
46 contribuye a responder la pregunta de dónde ubicar las políticas públicas para limitar  
47 la mayor movilidad a través de la concentración geográfica de las funciones de vivir y  
48 trabajar. Por lo tanto, el documento evalúa dónde se encuentran las regiones  
49 desfavorecidas, indicando dónde se necesita crecimiento económico, e identifica las  
50 preferencias de movilidad de los diferentes tipos de trabajadores.

51  
52 Esta investigación contribuye a la discusión de la evaluación de la trazabilidad  
53 geográfica de los mercados de trabajo y el examen de su evolución a través del tiempo.  
54 El documento se suma a la literatura al investigar cómo formar regiones funcionales  
55 consideradas como polos de atracción económica y propuestas como regiones  
56 analíticas individuales. Además, esta investigación contribuye a cumplir con las  
57 características deseadas para las regiones analíticas mencionadas recurrentemente,  
58 como: compacidad, contigüidad (Garfinkel & Nemhauser, 1970), restricciones de  
59 tamaño, forma (Rossiter & Johnston, 1981), y barreras naturales de la geografía como  
60 montañas y ríos o lagos (Zoltners & Sinha, 1983) que limitan la conectividad territorial  
61 (Horn, 2010). La metodología elegida limita el uso de decisiones arbitrarias y subjetivas  
62 y ayuda a optimizar las regiones de acuerdo con la información en estudio (vínculos  
63 sociales, económicos y comerciales existentes entre los municipios). La técnica  
64 también produce una regionalización coherente y es fácil de interpretar sin necesidad  
65 de una matriz contigua. Además, contribuye a la literatura (Atkinson-Palombo & Kuby,  
66 2011; Boermans, Roelfsema, Zhang., 2011; Carey, 1966; Plane & Heins, 2003) que  
67 plantea que los agentes económicos están sujetos a fuerzas que ejercen presiones  
68 diferentes en cada uno de ellos. ubicación geográfica. Evalúa sus principales hipótesis  
69 con metodologías que analizan la información contenida en variables generadas por  
70 fenómenos influidos por la ubicación de los agentes económicos y sociales. Estos  
71 trabajos parten del supuesto de que existen factores que actúan a nivel local que  
72 influyen en la actividad social y económica de cada región. El enfoque aplicado en este  
73 documento mejora la discusión en dos frentes. En primer lugar, desagrega a la  
74 población general en 11 estratos, reconociendo las diferentes necesidades de las  
75 personas que componen la plantilla y sus diferentes hábitos de movilidad a través de  
76 sus índices de autocontención, lo que permite profundizar en el análisis de las áreas.  
77 En este sentido, nuestros resultados muestran que las características intrínsecas de

78 la fuerza laboral afectan sus preferencias de movilidad (Hansen, 2015). Hansen (2015)  
79 señala que existen diferencias de género en cuanto a la elección del lugar de trabajo,  
80 debido a que las mujeres están más influenciadas por las preferencias profesionales;  
81 el contenido del trabajo es importante y motiva la movilidad de la mano de obra  
82 altamente calificada. En segundo lugar, la evidencia empírica para evaluar la evolución  
83 de la MLL se construye con datos extraídos de los censos de 2001 y 2011, lo que  
84 permite captar el impacto en las condiciones laborales a través de una importante  
85 contracción económica.

86

## 87 **2. Metodología y Datos**

88

### 89 **2.1 Datos**

90

91 Cada 10 años, el Instituto Español de Estadística realiza el Censo de Población y  
92 Vivienda. Las encuestas realizadas en 2001 y 2011 permiten examinar en detalle un  
93 conjunto de características de los trabajadores (género, ocupación, actividad, lugar de  
94 residencia, lugar de trabajo). Debido a que el censo se realiza periódicamente (cada  
95 10 años), es posible detectar cambios o evoluciones generales en la información. Por  
96 lo tanto, podemos determinar cambios en el espacio demográfico evaluando la  
97 estructura de movilidad o la situación del mercado laboral, sintetizando y presentando  
98 exploraciones muy específicas. En este caso de estudio, la muestra (Tab. 1) está  
99 estratificada por: género, ocupación (agricultura, servicios, construcción y  
100 manufactura) y actividad (profesional, cuello blanco, trabajo manual calificado y trabajo  
101 manual no calificado). Los viajeros de cada estrato trazan MLL tanto para 2001 como  
102 para 2011, que luego se clasifican en MLL que cambian de áreas excedentes en  
103 puestos de trabajo a áreas deficitarias o viceversa, debido a la variación de  
104 trabajadores, puestos de trabajo y dos índices de autocontención.

105

### 106 **2.2 Metodología**

107

108 La metodología escogida es un proceso iterativo con N-1 pasos basado en el cálculo  
109 de indicadores que miden la intensidad de los flujos de viajeros entre pares de áreas,  
110 fusionando en cada uno de los N-1 pasos las dos áreas más relacionadas. En cada  
111 paso, se agrupan dos áreas y la interacción entre estas dos áreas se convierte en una  
112 interacción interna (o intrazonal) para una nueva área resultante. Esta nueva área  
113 ahora toma el lugar de las dos áreas principales en el siguiente paso del análisis (De  
114 Jong & Van der Vaart, 2010). Esta metodología, utilizada sobre la matriz origen-destino  
115 de viaje, permite inferir grupos de regiones homogéneas en función del número de  
116 personas que viven en un área y comparten destinos en su trayecto diario al trabajo.

117 Estas regiones (MLL) están formadas por municipios, y las consideramos similares si  
 118 los trabajadores tienen destinos (trabajo) y orígenes (residencia) similares en su vida  
 119 cotidiana. Es decir, dos áreas se consideran similares si las personas que viven en  
 120 estos dos municipios tienen destinos similares en su viaje. Específicamente, en cada  
 121 N-1 pasos del proceso de aglomeración la función objetivo:  
 122

$$\frac{T_{ij}}{(\sum_i T_{ij} * \sum_j T_{ij})} + \frac{T_{ji}}{(\sum_j T_{ji} * \sum_i T_{ji})} \quad (1)$$

123 es maximizada,  
 124 donde  
 125  $T_{ij}$  es la interacción entre el origen  $i$  y el destino  $j$ .

### 127 3. Resultados y análisis

128 **Tabla 1. índices de movilidad por estrato por año**

	Census 2011		Census 2001	
	Auto-Con- tención de la Oferta	Auto-Con- tención de la De- manda	Auto-Con- tención de la Oferta	Auto-Con- tención de la De- manda
Estrato:	Media	Media	Media	Media
<i>General Población</i>	83.2%	84.6%	88.5%	86.3%
<i>Mujeres</i>	82.1%	83.9%	90.6%	88.7%
<i>Hombres</i>	73.9%	78.1%	86.1%	85.6%
Clasifica- ción Na- cional de Activida- des:				
<i>Agricultura</i>	80.5%	79.2%	85.9%	88.9%
<i>Manufac- tura</i>	84.5%	89.6%	82.1%	83.8%
<i>Constru- ción</i>	81.4%	88.5%	85%	85.9%

<i>Servicios</i>	72.3%	73.2%	73.1%	73.8%
Clasificación Nacional de Ocupaciones:				
<i>Administradores, Profesionales y Técnicos</i>	66.4%	71.4%	62.5%	69.6%
<i>Supervisores y No Manuales Trabajadores</i>	78.1%	79.3%	81.4%	77.2%
<i>Trabajadores Manuales Calificados</i>	82.1%	85.6%	86.1%	84.4%
<i>Trabajadores Manuales No Calificados</i>	86.3%	88.1%	85.3%	83.2%

130

131

132 Los resultados muestran un aumento de los flujos intermunicipales en todo el territorio,  
 133 lo que apunta a un aumento global de la movilidad, dando paso a áreas funcionales  
 134 más amplias y menores niveles de autocontención reflejados en la duración del viaje  
 135 al trabajo. Esto impacta en la calidad de vida, la cohesión social y la sostenibilidad de  
 136 los territorios. Afectados por el aumento del tránsito vehicular, los territorios ven  
 137 mayores niveles de contaminación atmosférica y acústica, exigiendo nuevas y  
 138 específicas políticas para su ordenación. En este sentido, los flujos de desplazamiento  
 139 son relevantes para fines de planificación en el transporte y la vivienda, otorgándoles  
 140 valor como base para las políticas de transporte y crecimiento económico. Por lo tanto,

141 la ubicación de casas y trabajos en diferentes puntos del espacio implica la necesidad  
142 de un transporte costoso que debería ser facilitado por una infraestructura costosa,  
143 entre otros tipos de intervenciones de política relacionadas con la asistencia  
144 gubernamental. Es necesario discutir y eventualmente reconocer, al menos en las  
145 inversiones y asignaciones presupuestarias, las tensiones e ineficiencias resultantes  
146 de la brecha entre el espacio funcional y el gobierno local. Es probable que se  
147 requieran tratamientos específicos para la gestión ambiental, la infraestructura, la  
148 cultura, el desarrollo económico, la educación municipal, etc. Esto indica que las  
149 trabajadoras tienden a residir dentro de la misma MLL en porcentajes más altos que  
150 los trabajadores varones. Esto se debe a que el viaje al trabajo está más influenciado  
151 por las preferencias profesionales de las mujeres que por las de los hombres. En  
152 ambos años, la movilidad entre segmentos muestra que el segmento de Profesionales  
153 y Técnicos Administrativos tiene la mayor tendencia a desplazarse seguido del  
154 segmento Masculino. El segmento con menor propensión a viajar es el segmento  
155 Femenino seguido del segmento de la Construcción. Este resultado que muestra una  
156 mayor distancia de desplazamiento en el segmento de Profesionales y Técnicos  
157 Administrativos contradice la suposición de que una tasa salarial más alta conduciría  
158 a un desplazamiento más corto. Una posible explicación es que los trabajadores con  
159 altos ingresos suelen tener un alto nivel de educación y especialización. Como  
160 consecuencia, el segmento del mercado laboral que es relevante para ellos es más  
161 pequeño que para otros segmentos. Además, estos trabajadores también tienen  
162 preferencias con respecto a la vivienda que restringen sus conjuntos de elección a un  
163 pequeño segmento del mercado de la vivienda, lo que puede implicar que las  
164 combinaciones satisfactorias de residencia y trabajo solo se pueden realizar a costa  
165 de aceptar largos viajes al trabajo.

166

167 En general, hay un aumento de la movilidad como consecuencia de la disminución del  
168 autoconfinamiento entre 2001 y 2011, como se muestra en la disminución de los  
169 índices de oferta y demanda de los segmentos Femenino, Masculino, Agricultura y  
170 Construcción. Los segmentos de Manufactura, Trabajadores Manuales No Calificados  
171 y Profesionales y Técnicos Administrativos muestran una disminución en la movilidad.  
172 En resumen, hay un incremento de los flujos intermunicipales en todos los territorios,  
173 lo que apunta a un aumento global de la movilidad. Los índices de autocontención  
174 muestran una reducción en la concentración de flujos, lo que significa que aumenta la  
175 interacción urbana entre regiones. Junto a esta tendencia, se realiza una clasificación  
176 de los MLL considerando su variación entre ambos años en los índices de ocupación  
177 y número de trabajadores, y en los índices de autocontención de la demanda y la  
178 oferta.

179

180 Encontramos que hay zonas con una importante oferta de empleo que tienen la  
181 capacidad de atraer flujos de trabajadores de las zonas aledañas. Las áreas que  
182 muestran un déficit de empleos podrían recibir ayuda con políticas y asignación de  
183 recursos. Nuestra evidencia también muestra diferentes comportamientos de la fuerza  
184 laboral que coinciden con las características de cada segmento de nuestros  
185 subgrupos. El segmento con mayor tendencia a desplazarse es el de Profesionales y  
186 Técnicos Administrativos seguido del segmento Masculino. El segmento con menor  
187 propensión a viajar es el segmento Femenino seguido del segmento de la  
188 Construcción. Este comportamiento se evidencia en los niveles de autocontención  
189 (tanto de la oferta como de la demanda) de los MLL formados únicamente por  
190 trabajadoras, que son superiores a los de los hombres en ambos años, lo que indica  
191 que los MLL formados por trabajadoras son más cerrados en términos de salidas y las  
192 entradas y que la interacción funcional con otros MLL es menor para las mujeres que  
193 para los hombres. Esto indica que un mayor porcentaje de trabajadoras residen dentro  
194 de la misma MLL que los trabajadores varones. Una posible explicación es que el viaje  
195 al trabajo está más influenciado por las preferencias profesionales de las mujeres que  
196 de los hombres, lo que respalda hallazgos previos sobre este tema en la literatura  
197 (Hansen 2015).

198  
199 Con respecto a los segmentos de Construcción, Trabajadores Manuales No  
200 Calificados y Manufactura, sus índices de autocontención son representativos de  
201 mercados deficitarios en ambos años, aunque el déficit aumenta en 2011. Esto se  
202 refleja en una mayor diferencia entre los índices de autocontención de 2001 y 2011,  
203 ya que el índice de autocontención de la oferta es inferior al índice de autocontención  
204 de la demanda, lo que indica un déficit de puestos de trabajo y un predominio de las  
205 salidas sobre las entradas en su MLL.

206  
207 Los segmentos de Manufactura y Construcción fueron los dos más afectados,  
208 presentando ya un déficit de empleos en 2001. El déficit aumentó aún más, siendo el  
209 sector de la construcción el más afectado ya que hay una contracción en la oferta de  
210 empleos y un aumento en la demanda.

211  
212 Hay un aumento en la movilidad, evidenciado por la disminución de ambos índices de  
213 autocontención entre 2001 y 2011, para los segmentos Femenino, Masculino,  
214 Agricultura y Construcción. Sin embargo, los segmentos Manufactura, Trabajadores  
215 Manuales No Calificados y Profesionales y Técnicos Administrativos muestran una  
216 disminución en la movilidad entre 2001 y 2011, lo que implica que estos tres segmentos  
217 tenían menos incentivos para recorrer una mayor distancia en 2011 que en 2001.



218 Asimismo, estos tres segmentos muestran un déficit de puestos de trabajo  
219 en 2011.

220

221

#### 222 **4. Conclusiones**

223

224 El creciente problema del aumento de la movilidad se puede abordar mediante  
225 políticas que se centren en varias áreas. Por ejemplo, la movilidad puede abordarse a  
226 través de políticas enfocadas en ubicar las viviendas y los lugares de trabajo a  
227 distancias fácilmente recorridas por medios de transporte alternativos como la bicicleta  
228 o el transporte público, limitando la posterior urbanización de las zonas rurales.  
229 Concentrar geográficamente las funciones de vivienda y trabajo a través de la  
230 promoción del Desarrollo Orientado al Tránsito (TOD) que significa construir edificios  
231 de viviendas de alta densidad, lugares de trabajo, servicios y tiendas cerca de las  
232 estaciones del sistema de transporte masivo. También es importante la construcción  
233 de instalaciones y servicios de transporte adecuados, la flexibilidad del tiempo de  
234 trabajo y la disponibilidad de servicios complementarios como el cuidado de los niños.  
235 Además, las condiciones favorables del mercado de la vivienda representan un factor  
236 importante en la reducción de la movilidad. Finalmente, la expansión del teletrabajo  
237 puede considerarse una innovación tecnológica y organizativa para disminuir la  
238 movilidad.

239

240

#### 241 **5. Índice de referencias**

242

243 Atkinson-Palombo, C., & Kuby, M. J. (2011). The geography of advance transit-oriented  
244 development in metropolitan Phoenix, Arizona, 2000–2007. *Journal of Transport*  
245 *Geography*, 19(2), 189–199. doi: 10.1016/j.jtrangeo.2010.03.014

246

247 Boermans, M. A., Roelfsema, H., & Zhang, Y. (2011). Regional determinants of FDI in  
248 China: A factor- based approach. *Journal of Chinese Economic*  
249 *and Business Studies*, 9(1), 23–42. doi:  
250 10.1080/14765284.2011.542884

251

252 Carey, G. W. (1966). The Regional Interpretation of  
253 Manhattan Population and Housing Patterns through Factor Analysis. *Geographical*  
254 *Review*, 56(4), 551. doi: 10.2307/213059

255

- 256 De Jong, T., & Van der Vaart, N. (2010). Manual Flowmap 7.4. The Netherlands:  
257 Faculty of Geographical Sciences, Utrecht University. Retrieved from <Http://Flowmap>.  
258 Geo. Uu. NI/Downloads/FM740\_Manual. Pdf.  
259
- 260 Farmer, C. J. Q., & Fotheringham, A. S. (2011). Network-Based Functional Regions.  
261 Environment and Planning A: Economy and Space, 43(11), 2723–2741. doi:  
262 10.1068/a44136  
263
- 264 Garfinkel, R. S., & Nemhauser, G. L. (1970). Optimal Political Districting by Implicit  
265 Enumeration Techniques. Management Science, 16(8), B-495- B-508. doi:  
266 10.1287/mnsc.16.8.B495  
267
- 268 Green, A. E., Coombes, M. G., & Owen, D. W. (1986). Gender-specific local labour  
269 market areas in England and Wales. Geoforum, 17(3–4), 339– 351. doi: 10.1016/0016-  
270 7185(86)90002-3  
271
- 272 Hansen, K. E. H. (2015). Labour mobility in the public sector: The impact of job  
273 opportunities. Geografisk Tidsskrift-Danish Journal of Geography, 115(2), 133–141.  
274 doi: 10.1080/00167223.2015.1080623  
275
- 276 Horn, M. E. T. (2010). Solution Techniques for Large Regional Partitioning Problems.  
277 Geographical Analysis, 27(3), 230–248. doi: 10.1111/j.1538- 4632.1995.tb00907.x  
278
- 279 Persyn, D. (2011). Functional Labor Markets in Belgium: Evolution over time and  
280 intersectoral comparison.  
281
- 282 Plane, D. A., & Heins, F. (2003). Age articulation of U.S. inter-metropolitan migration  
283 flows. The Annals of Regional Science, 37(1), 107–130. doi: 10.1007/s001680200114  
284
- 285 Rossiter, D. J., & Johnston, R. J. (1981). Program GROUP: The Identification of All  
286 Possible Solutions to a Constituency-Delimitation Problem. Environment and Planning  
287 A: Economy and Space, 13(2), 231–238. doi: 10.1068/a130231  
288
- 289 Zoltners, A. A., & Sinha, P. (1983). Sales Territory Alignment: A Review and Model.  
290 Management Science, 29(11), 1237–1256. doi: 10.1287/mnsc.29.11.1237

## DESARROLLO DE UN LIBRO ELECTRÓNICO CON MATERIAL INTERACTIVO DEL TEMA DE ESTIMACIÓN

Pineda Becerril Miguel de Nazareth<sup>1,\*</sup>, García León Omar<sup>2</sup>, Aguilar Márquez Armando<sup>3</sup>, León Rodríguez Frida<sup>4</sup> y Vega Becerril Héctor Adrián<sup>5</sup>.  
<sup>1,2,3,4, 5</sup> Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. Carretera Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5, Colonia San Sebastián Xhala. Cuautitlán Izcalli, Estado de México, C. P. 54714.

ID-POSM034

### Resumen

*El libro multimedia del tema de estimación, el objetivo principal de este libro electrónico es que el alumno aprenderá a hacer inferencias acerca de un parámetro poblacional mediante el análisis de las diferencias entre los resultados observados, el estadístico y los resultados que esperaría obtener si una hipótesis fuera verdadera, además este material actuará como un elemento catalizador de la integración de las TICs en el proceso educativo de enseñanza-aprendizaje de las asignaturas de Estadística. Este libro ofrece a los estudiantes una experiencia a pantalla completa con galerías, videos, diagramas interactivos, expresiones matemáticas y más; este libro da vida al contenido en formas que una página impresa no lo puede hacer. Los alumnos podrán hojear el libro con sólo deslizar un dedo en la pantalla. En resumen, los contenidos audiovisuales de estos libros aportarán ventajas a la hora de las explicaciones y de la comprensión de los conceptos. Al ser interactivos, se aprovecharán todas las ventajas de la red y sus aplicaciones. Se adaptarán a los cambios curriculares y aprovechando la flexibilidad digital, los profesores podrán seleccionar contenidos, añadir, modificar, etc., es decir, serán libros de textos que estarán en continua revisión.*

**Palabras clave:** libro interactivo, estimación, inferencia estadística.

### 1. Introducción

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación, TICs, plantean nuevos escenarios que requieren una revisión del modelo clásico de enseñanza, ya que tanto las metodologías, la forma de acceder y adquirir los conocimientos y los recursos utilizados, se ven afectados por esta tecnología. Los estudiantes de hoy han crecido inmersos en la tecnología, donde la computadora, las tabletas y los celulares, etc., son formas en que interactúan con su mundo, por lo que necesitan material de estudio que se ajuste a la forma en cómo aprenden.

Material didáctico acorde a estas ideas son los libros de texto digital integrados en entornos virtuales adecuados; un libro digital es una publicación cuyo soporte es un archivo electrónico que pueda almacenarse en distintos soportes digitales y permite

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: mnazarethp@gmail.com

45 incorporar elementos interactivos y multimedia. La elaboración del libro multimedia  
46 del tema de probabilidad para los cursos de estadística que se imparten en la FES-  
47 Cuautitlán en un entorno virtual, se fundamenta en la teoría del constructivismo  
48 social, la cual sostiene que un ambiente de aprendizaje óptimo es aquel donde existe  
49 una interacción dinámica entre los profesores, los alumnos y las tareas que proveen  
50 oportunidades para que los alumnos construyan su propio conocimiento, lo que  
51 ocurre debido a la interacción con los otros.

52

53

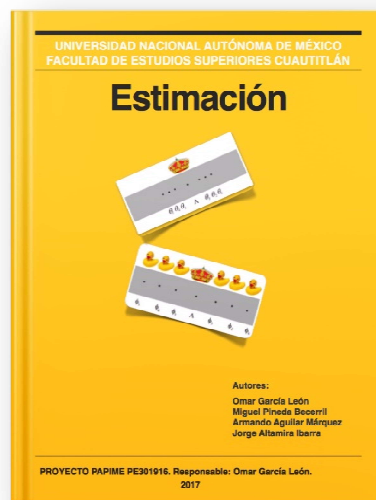
54 En resumen, los contenidos audiovisuales del libro aportarán ventajas a la hora de  
55 las explicaciones y de la comprensión de los conceptos. Al ser interactivos, se  
56 aprovecharán todas las ventajas de la red y sus aplicaciones. Se adaptarán a los  
57 cambios curriculares y aprovechando la flexibilidad digital, los profesores podrán  
58 seleccionar contenidos, añadir, modificar, etc., es decir, serán libros de textos que  
59 estarán en continua revisión.

60

## 61 2. Metodología

62

63 La Fig. (1) nos muestra la portada del libro multimedia desarrollado para el tema de  
64 estimación, este tema está incluido en los temarios de las asignaturas de  
65 probabilidad y estadística que se imparten en la Facultad de Estudios Superiores  
66 Cuautitlán.



67

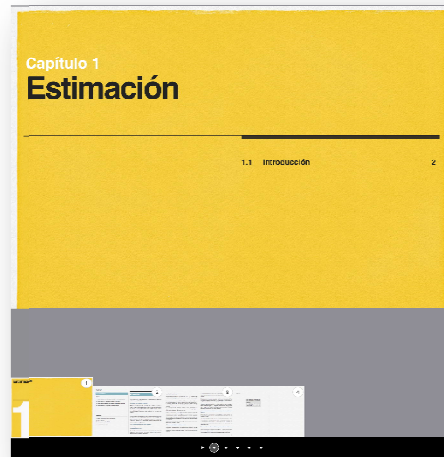
68

Figura 1. Portada del libro multimedia del tema de Estimación

69

70 El contenido del libro interactivo es el siguiente: Video de introducción, Capítulo 1  
71 Introducción, Capítulo 2 Propiedades de los estimadores, Capítulo 3 Evaluación de la  
72 bondad de un estimador puntual, Capítulo 4 Estimación por intervalos y Capítulo 5  
73 Actividades. La Fig. (2) nos muestra el contenido del libro.

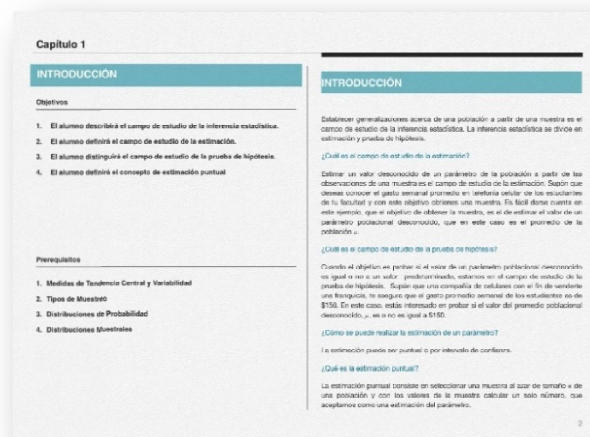
74



75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82

**Figura 2. Contenido del libro multimedia del tema de Estimación**

En cada capítulo se desarrolló la parte teórica en forma de preguntas y respuestas, con la finalidad de que los alumnos adquirieran una mejor comprensión de los temas. La Fig. (3) nos muestra la forma de preguntas y respuestas de la introducción al tema de estimación.



83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91

**Figura 3. Desarrollo del contenido del capítulo 1**

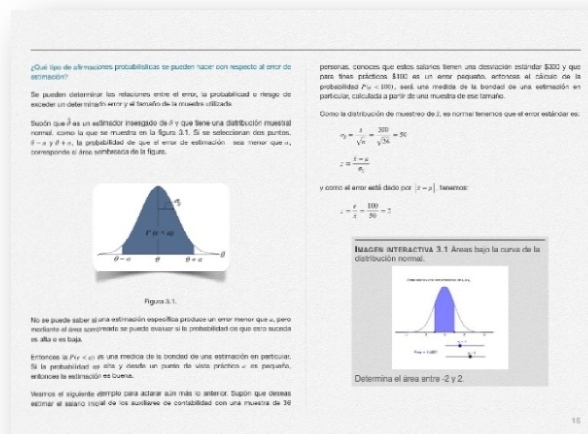
Los videos cada día ganan más atención por parte de los docentes como herramienta de contenidos e información, dentro de este contexto al libro digital se le agregó un video de introducción del tema de estimación, el cuál muestra la definición de este tema y las características del contenido del libro. La Fig. (4) nos muestra el video de introducción.



**Figura 4. Video de introducción del tema de Estimación**

92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100  
101  
102  
103  
104  
105  
106

iBooks Author tiene una serie de herramientas que nos permite hacer un eBook altamente interactivo de una forma muy fácil, pero la herramienta más poderosa y flexible de todas es el Widget HTML, con el que podemos agregar básicamente cualquier animación/interacción que se pueda imaginar. En la mayoría de los capítulos se hizo uso del widget HTML, ya que con esta herramienta se puede hacer todo tipo de animaciones, interacciones, páginas web, banners, GIFs, etc. En este libro se utilizó para explicar mejor la parte teórica o en la resolución de un ejercicio. En la Fig. (5) se muestra un widget el cuál se hizo con la finalidad de poder visualizar y calcular las áreas bajo la curva de una distribución normal estándar de dos valores, es decir dado un valor  $z_1$  y un valor  $z_2$ . El alumno puede definir los valores y automáticamente obtendrá dicha área bajo la curva.



**Figura 5. Imagen interactiva**

107  
108  
109

110 GeoGebra es un programa dinámico para la enseñanza y aprendizaje de las  
 111 matemáticas para educación en todos sus niveles. Combina dinámicamente,  
 112 geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo a nivel  
 113 operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada  
 114 una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de  
 115 organización en tablas y planillas, y hojas de datos dinámicamente vinculadas.  
 116 Dentro de los capítulos del libro desarrollado se incluyeron imágenes interactivas  
 117 elaboradas con el uso de GeoGebra, en la Fig. (6) se muestra una de estas  
 118 imágenes interactivas, la cual se realizó con la finalidad de mostrar cómo afecta el  
 119 nivel de confianza en la realización de los intervalos, es decir, el alumno puede  
 120 cambiar el nivel de confianza de los intervalos y podrá observar el cambio en el  
 121 ancho del intervalo, además puede observar que intervalos no incluyen en valor de la  
 122 media poblacional.

123  
 124

MEMORIAS DEL

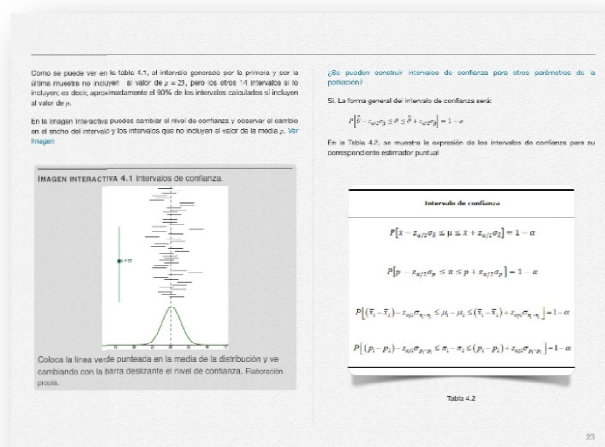


Figura 6. Video de introducción del tema de Estimación

125  
 126  
 127  
 128  
 129  
 130  
 131  
 132  
 133

Con la finalidad de que los alumnos refuercen los conocimientos del tema de estimación, se elaboró un capítulo de Actividades propuestas, en el cual consiste en ejercicios que se pueden resolver utilizando las herramientas propuestas en los capítulos anteriores. La Fig. (7) nos muestra el capítulo 5 del libro multimedia elaborado.

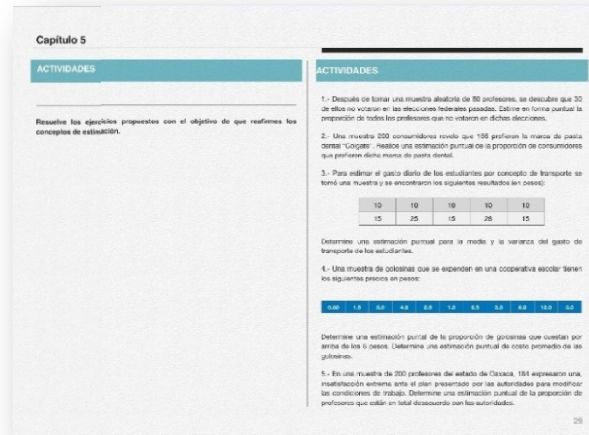


Figura 7. Actividades propuestas del tema de Estimación

### 3. Resultados

Se utilizaron los recursos del libro electrónico del tema de estimación, en un grupo piloto (grupo A), los resultados del examen correspondiente a los temas de estimación, las cuales se compararon con otro grupo que no lo utilizó (grupo B). Además, los grupos que se compararon fueron grupos de un mismo profesor y en la misma licenciatura. La Fig. (8) nos muestra los resultados del examen del tema de estimación de ambos grupos.

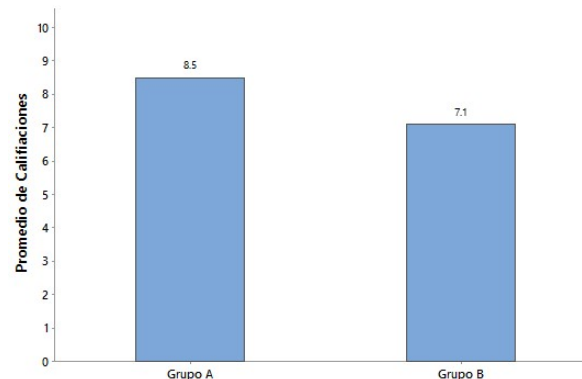


Figura 8. Resultados del examen del tema de estimación

### 4. Conclusiones

La tecnología que se ha integrado al proceso educativo está cambiando los paradigmas de enseñanza. Esto lo podemos ver hasta en escuelas de bajo recursos. Los cambios son en términos generales, buenos. Gracias a la tecnología los libros también están cambiando la forma de enseñanza. Consideramos que el alumno al hacer uso del libro electrónico desarrollado del tema de Estimación, este tendrá una



156 mejor forma de aprendizaje al considerar el libro como un material complementario  
157 para los temas del curso normal.

158

159 También se considera que al hacer uso del libro electrónico el alumno se puede  
160 enfocar a la interpretación de los resultados y a la comprensión de los temas, más  
161 que a la memorización de fórmulas; ya que con el uso de software propuesto los  
162 resultados se obtienen de una manera más rápida y el alumno se debe enfocar a la  
163 interpretación de estos con un pensamiento crítico que ayude a la toma de  
164 decisiones.

165

166

### 167 **Índice de referencias**

168

169 • Anderson. D. R., (2011). *Statistics for Business and Economics*, México: South-  
170 Western College Pub.

171 • Devore, J. (2011). *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*.  
172 México: CENGAGE Learning, 8 edition

173 • Levin, R. I., Rubin, D.S., (2010). *Estadística para Administración y Economía*.  
174 México: Ed. Pearson Prentice Hall, 7<sup>a</sup>. Edición

175 • Kenneth, C.L., (2012). *Sistemas de Información Gerencial*, México: Always  
176 Learning Pearson, 12 edición

177 • McClave, T., Benson, P., (2010). *Statistics for Business and Economics*, México:  
178 Prentice Hall; 11 edition.

179 • Triola, M. (2010). *Estadística*, México: Pearson Educación 11 edición.

180

181

# ALGORITMOS DE MACHINE LEARNING IMPLEMENTADOS EN CIBERSEGURIDAD, PARA EL ANÁLISIS DE FRAUDES BANCARIOS

Flores Pérez Judith Mayte<sup>1,\*</sup>, Rosas Fonseca Rosalba Nancy<sup>2</sup>, Pineda Becerril Miguel de Nazareth<sup>3</sup> y García León Omar.<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup>Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Carretera Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5, Col. San Sebastián Xhala, Cuautitlán Izcalli, Estado de México, C.P. 54714.

AP-POSM035

## Resumen

*El mundo de la ciberseguridad ha cambiado. Las soluciones que se basaban en firmas, las listas blancas, controles de aplicaciones y heurística han fallado debido al nuevo panorama, donde las amenazas son más constantes y contundentes, ya que los atacantes han aprendido a automatizar sus códigos maliciosos. En los últimos años, la industria de la ciberseguridad se ha preocupado cada vez más en investigar, desarrollar e implementar el uso de algoritmos de Machine Learning, que permitan a las empresas analizar mejor las amenazas y tomar decisiones óptimas para enfrentar los retos actuales.*

*Este trabajo pretende analizar e implementar algoritmos de Machine Learning (ML) que permitan identificar fraudes en pago con tarjetas.*

*Para el desarrollo de este trabajo se hará uso del lenguaje de programación Python, utilizando Spyder de Anaconda, donde se analizarán diferentes algoritmos, haciendo uso de un dataset con información de registros fraudulentos, de tal forma que se puedan comparar los resultados encontrados, para así decidir cuál es el algoritmo que mejor se adapta al problema de estudio y el que predice mejor los resultados.*

**Palabras clave:** Machine, Learning, Algoritmos, Python, detección, fraude.

## 1. Introducción

El delito de fraude contra el sistema financiero es uno de los problemas más frecuentes que viven las instituciones bancarias y sus clientes, debido a que en la mayoría de los casos se tiene una pérdida económica.

De acuerdo con Pérez H. (2007), a nivel mundial existen un sin número de personas dedicadas a estudiar diferentes eventos, que les permitan obtener grandes cantidades de dinero sin ser percibidas por las autoridades, vulnerando controles establecidos en las instituciones bancarias.

Dentro de los esfuerzos por detectar a tiempo cualquier anomalía o fraude, las entidades han tenido que ir en búsqueda de mejores opciones para enfrentar esta problemática y gracias a los avances tecnológicos, la Inteligencia Artificial está teniendo una buena respuesta en el manejo de situaciones complejas, manejando una gran cantidad de información y donde los resultados deben ser precisos e inmediatos.

<sup>1</sup> \*Autor para la correspondencia. E-mail: mayte\_fp@hotmail.com Tel. 13-85-69-06.

44  
45 Una de las áreas relacionadas con la Inteligencia Artificial, es el Machine Learning, que  
46 permite lidiar con grandes cantidades de datos y utiliza la estadística, entre otras  
47 disciplinas de las matemáticas para obtener sus resultados.

48  
49 Por todo lo anterior, el presente trabajo tiene como objetivo, determinar si hubo o no  
50 una transacción fraudulenta con tarjetas de crédito, utilizando un dataset con  
51 información de tarjetas bancarias e implementar algoritmos de machine learning que  
52 permitan predecir los resultados de los fraudes, haciendo una comparativa para  
53 determinar cuál realiza una mejor predicción.

## 54 55 **2. Marco Teórico**

### 56 57 2.1 ¿Que es el Machine Learning?

58  
59 De acuerdo con Samuel A.L. (1988) “Es el campo de estudio que proporciona a las  
60 máquinas la capacidad de aprender sin ser programadas de forma explícita”.

61 El ML se puede abordar desde distintas perspectivas como: aprendizaje supervisado  
62 (Es aquel en donde se entrena un algoritmo mediante información, permitiendo hacer  
63 predicciones), aprendizaje no supervisado (no se requiere intervención humana para  
64 elaborar un conjunto de datos previamente categorizados y posteriormente presentarlo  
65 al algoritmo de aprendizaje, su meta es encontrar información considerando la  
66 distribución y composición de los datos) y aprendizaje reforzado (el sistema puede  
67 observar su entorno y tomar decisiones que lo harán recibir recompensas positivas o  
68 negativas), los cuáles según Mitchell T.M.(1997), han demostrado ser útiles en diversos  
69 dominios de aplicación, donde se suelen manejar una gran cantidad de datos.

### 70 2.2. Algoritmos de aprendizaje supervisado

71 Dentro de las modalidades del aprendizaje supervisado de ML se encuentran: los  
72 algoritmos de clasificación supervisada y regresión. En el caso de los primeros, se  
73 persigue la obtención de un modelo para predecir casos futuros.

74 Los algoritmos de clasificación supervisada se utilizan cuando las salidas deseadas son  
75 del tipo discreto, es decir, cuando las respuestas se alojan dentro de un conjunto finito  
76 de resultados posibles, pero cuando solo se tienen dos opciones, se habla de  
77 clasificación binaria.

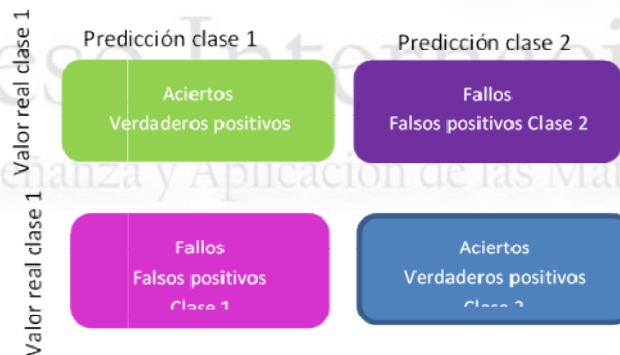
78 Los algoritmos de regresión son útiles cuando se desea predecir valores continuos, lo  
79 que significa que las respuestas se dan mediante una cuantía. Existen varios modelos  
80 de regresión, pero el que se utiliza en este proyecto es Regresión Logística.

81 2.2.1. Regresión Logística

82 De acuerdo con De la Fuente S. (S.F). es una de las técnicas estadístico-inferenciales  
 83 más empleadas en la producción científica y que forma parte de un conjunto de  
 84 métodos estadísticos que tiene especial relevancia cuando solo hay dos posibles  
 85 respuestas.

86 2.3. Matriz de confusión

87 En el campo de la Inteligencia artificial es una de las herramientas que permite evaluar  
 88 el desempeño de un algoritmo de aprendizaje supervisado, donde cada columna de la  
 89 matriz, se presenta el número de predicciones de cada clase, mientras que cada fila  
 90 representa a las instancias en la clase real. En términos simples, permite saber que  
 91 tipos de aciertos y errores está teniendo el modelo (ver Fig. (1)).



92 **Figura 1. Matriz de confusión**

93 La matriz de confusión maneja dos datos importantes llamado recall que indica que  
 94 tanto el modelo detecta esa clase y F1 score es otra métrica que combina la precisión  
 95 con recall.

96 **3. Metodología o desarrollo**

97 En este trabajo se utilizó el lenguaje de programación Python con su entorno de  
 98 desarrollo Spyder de Anaconda, ya que es un lenguaje de programación muy utilizado  
 99 actualmente en procesos que están relacionados con ML, ya que cuenta con una  
 100 multitud de librerías y frameworks, es de código abierto y es de fácil manejo y  
 101 entendimiento.

102 Los datos (dataset) fueron obtenidos de un repositorio digital llamado Kaggle, que  
 103 cuenta con diversas bases de datos de cualquier tema para realizar trabajos de  
 104 investigación y escolares.

105 El dataset, contiene una recopilación de transacciones que fueron realizadas con  
 106 tarjetas de crédito en septiembre de 2013. Está conformado por variables numéricas, se

113 observa la variable time (segundos de la transacción), amount (monto de la transacción)  
114 y class(1 si hubo fraude y 0 si no hubo), pero el resto de las variables solo están  
115 nombradas como V1 hasta V28, debido a la confidencialidad de los datos.

116

117 Para el desarrollo de este trabajo se considerará las siguientes etapas:

118 1. Obtención de los datos

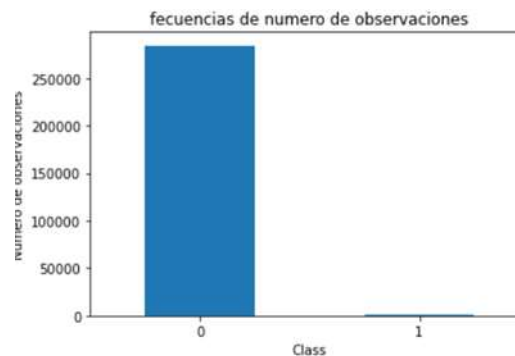
119 Como ya se mencionó anteriormente, los datos fueron descargados de la página de  
120 Kaggle (ver Fig. (2)), por lo que se requiere realizar un análisis exploratorio de los datos  
121 para saber cuál es su comportamiento, es decir si son datos balanceados o  
122 desbalanceados. Esto se hace directamente en Spyder, colocándolos en una gráfica de  
123 barras (ver Fig. (3)).

```
... X_train, X_test, y_train, y_test=train_test_split()
información del dataset
  Time      V1      V2      ...      V28  Amount  Class
0      0.0 -1.359807 -0.072781 ... -0.021053  149.62    0
1      0.0  1.191857  0.266151 ...  0.014724    2.69    0
2      1.0 -1.358354 -1.340163 ... -0.059752  378.66    0
3      1.0 -0.966272 -0.185226 ...  0.061458  123.50    0
4      2.0 -1.158233  0.877737 ...  0.215153   69.99    0
...
284802 172786.0 -11.881118  10.071785 ...  0.823731    0.77    0
284803 172787.0 -0.732789 -0.055080 ... -0.053527   24.79    0
284804 172788.0  1.919565 -0.301254 ... -0.026561   67.88    0
284805 172788.0 -0.240440  0.530483 ...  0.104533   10.00    0
284806 172792.0 -0.533413 -0.189733 ...  0.013649  217.00    0
[284807 rows x 31 columns]
```

124

125

Figura 2. Dataset



126

127

Figura 3. Gráfica de barras de dataset

128 De acuerdo a la Fig. (3), los datos están desbalanceados, lo cual indica que la cantidad  
129 de valores de una clase, no corresponde a la misma cantidad que los de la otra clase.

130 2. Preprocesamiento de los datos y selección de características

131 De acuerdo con Hoyos J. (2019). El principal problema que ocasiona una base de datos  
132 desbalanceada, es que la mayoría de los algoritmos de clasificación no representan

133 adecuadamente las características distributivas y por lo tanto presentan precisiones  
134 desfavorables a través de las clases.

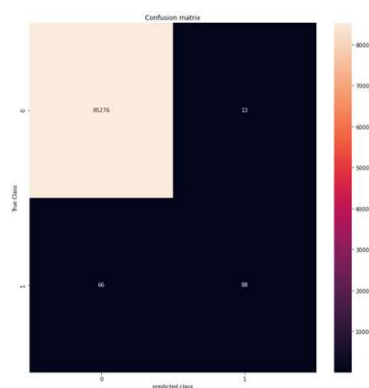
135 Existen varias técnicas para enfrentar este problema. Los métodos de sobre muestreo,  
136 aumentan el número de muestras de la clase minoritaria, sin embargo, trae consigo el  
137 problema de sobre ajuste. Por el contrario, los métodos de submuestreo reducen el  
138 número de muestras de la clase mayoritaria, el método más conocido es el muestreo  
139 aleatorio (RUS).

140 En este caso, en primer lugar, se realizará el modelo de regresión logística para  
141 determinar la precisión con la que predice las muestras y tener una pauta para  
142 comparar los resultados de las otras técnicas como: sobremuestreo como el Synthetic  
143 Minority Oversampling Technique (SMOTE) y Aprendizaje costo-sensitivo.

144 Primero se separan los datos en test y prueba para introducirlos al modelo una vez  
145 construido.

### 146 3. Selección y entrenamiento del modelo

147 Posteriormente se genera el modelo de regresión logística con los datos mencionados  
148 donde la variable X estará representada por la información sobre las tarjetas de crédito,  
149 mientras que la variable Y serán las clases 0 y 1, a continuación, se muestra el  
150 resultado en una matriz de confusión para determinar su eficiencia en la predicción de  
151 los resultados (ver figura 4). En este caso, se compara la variable  $y_{test}$  que contiene  
152 los datos de las clases de fraudes (0 y 1) y la variable  $y_{pred}$  será la variable que  
153 contiene los datos predichos por el modelo.



154

155

**Figura 4. Matriz de confusión para el modelo de regresión logística**

156 A partir de la Fig. (4) se obtienen los datos de la Fig. (5).

```

...: pred_y = model.predict(X_test)
...: mostrar_resultados(y_test, pred_y)

```

	precision	recall	f1-score	support
0	1.00	1.00	1.00	85289
1	0.87	0.57	0.69	154
accuracy			1.00	85443
macro avg	0.94	0.79	0.84	85443
weighted avg	1.00	1.00	1.00	85443

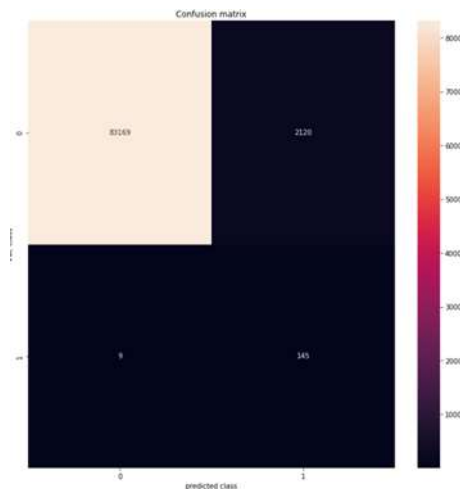
157

158

**Figura 5. Resultados de la matriz de confusión**

159 De acuerdo con la información de la Fig. (4) y de la Fig. (5), el modelo tuvo 66 fallos al  
 160 predecir los fraudes y 88 aciertos, dando un recall de 0.57 que es el valor que se  
 161 pretende mejorar utilizando otras técnicas, ya que como se mencionó, este valor se  
 162 debe al desbalanceo de los datos, provocando un alto valor para la clase mayoritaria y  
 163 un bajo recall para la clase minoritaria.

164 Para compensar esta situación se hará uso del aprendizaje costo sensitivo, que es un  
 165 método basado en la modificación de umbrales de decisión, asignando pesos a nuevas  
 166 instancias de acuerdo con la matriz de decisión de costos. Este proceso se hará,  
 167 agregando un peso al modelo de regresión logística para equilibrar la clase minoritaria y  
 168 volviendo a evaluar la solución con la matriz de confusión (ver Fig. (6)).



169

170

**Figura 6. Matriz de confusión usando Aprendizaje costo-sensitivo**

171 La nueva matriz de confusión de la Fig. (6), muestra que el modelo se equivocó solo 9  
 172 veces al predecir el fraude y acertó en 145, obteniendo un recall de 0.94.(ver Fig. (7)).

173

	precision	recall	f1-score	support
0	1.00	0.98	0.99	85289
1	0.06	0.94	0.12	154
accuracy			0.98	85443
macro avg	0.53	0.96	0.55	85443
weighted avg	1.00	0.98	0.99	85443

Figura 7. Resultados de la matriz de confusión con aprendizaje costo-sensitivo

174  
175  
176  
177  
178  
179  
180  
181  
182  
183  
184  
185  
186  
187  
188  
189  
190

Se observa en la Fig. (7) una importante mejora en la predicción, pero si ahora observamos el F1score, pareciera que el modelo empeoró y esto se debe a la compensación que se hizo al modelo, en tal caso, se debe usar otro método que permita efficientar estos resultados.

A continuación, se utilizará un submuestreo, en donde se descartarán muestras de la clase mayoritaria de acuerdo a algún criterio, de acuerdo con Sun Z., Song Q., Zhu X., Sun H., Xu B., and Zhou.Y. (2018), recientemente se han implementado algoritmos más avanzados que hacen dicha eliminación basa en agrupamiento K-nearest.

Al utilizar este submuestreo, también se obtiene buenos resultados, prediciendo 146 fraudes y fallando en 8 (ver Fig. (8), sin embargo, se aumentan los falsos positivos disminuyendo aún más el f1-score (ver Fig. (9)).

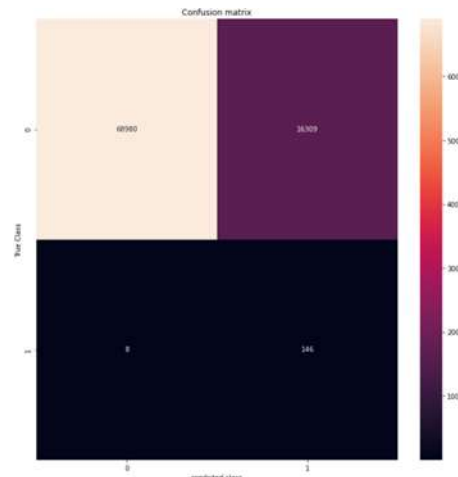


Figura 8. Resultados de la matriz de confusión con submuestreo

191  
192  
193

	precision	recall	f1-score	support
0	1.00	0.81	0.89	85289
1	0.01	0.95	0.02	154
accuracy			0.81	85443
macro avg	0.50	0.88	0.46	85443
weighted avg	1.00	0.81	0.89	85443

Figura 9. Resultados de la matriz de confusión con el submuestreo

194  
195  
196  
197  
198

Finalmente se utiliza el algoritmo SMOTE para sobremuestreo, que como ya se mencionó, permitirá crear nuevas muestras de clase minoritaria, se colocan los



199 parámetros dentro de Python y se obtiene nuevamente la matriz de confusión para  
 200 visualizar la bondad del modelo (ver Fig. (10)).

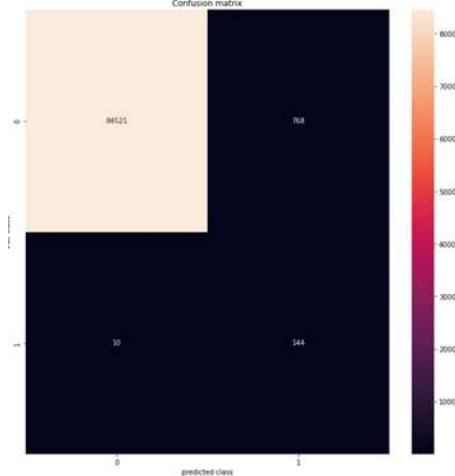


Figura 10. Matriz de confusión para SMOTE

201  
 202 Como resultados se observa que acertó 144 veces en la predicción de los fraudes y  
 203 fallo 10 veces, teniendo un recall bueno, aunque f1-score es bajo (ver Fig. (11)).  
 204  
 205

	precision	recall	f1-score	support
0	1.00	0.99	1.00	85289
1	0.16	0.94	0.27	154
accuracy			0.99	85443
macro avg	0.58	0.96	0.63	85443
weighted avg	1.00	0.99	0.99	85443

Figura 11. Resultados de la matriz de confusión para SMOTE

206  
 207  
 208  
 209 **3. Resultados y análisis**

210 De acuerdo con todas las estrategias utilizadas para la predicción de los datos  
 211 fraudulentos con tarjetas bancarias, en la Tab. (1), se observa que con la técnica de  
 212 costo-sensitivo y con SMOTE, se obtienen los mejores resultados, sin embargo, esto no  
 213 quiere decir que cuando los datos estén desbalanceados siempre que los datos se  
 214 deben utilizar estas dos técnicas.  
 215

216 En general, se puede utilizar cualquier técnica que permita obtener los resultados de  
 217 acuerdo con la aplicación que se tenga.  
 218  
 219

Tabla 1. Resultados de los diferentes algoritmos utilizados

Algoritmo	recall	F1-score
Regresión logística	0.57	0.69
Aprendizaje costo-sensitivo	0.94	0.12
Submuestreo	0.95	0.02
SMOTE	0.94	0.27

220  
 221 **4. Conclusiones**  
 222

223 El Machine Learning junto con sus algoritmos y métodos, constituyen una de las  
224 herramientas más importantes de hoy en día para trabajar con una cantidad de datos  
225 importante y para su análisis, además gracias a las nuevas tecnologías en el desarrollo  
226 de software, podemos contar con lenguajes de programación como Python, que  
227 permiten consolidar los avances teóricos en materia de Inteligencia Artificial.  
228 En el caso el presenté trabajó, se mostraron las diferentes técnicas y modelos que se  
229 pueden aplicar a la detección de fraudes, hacer una comparativa y definir cuál es la  
230 mejor opción, pero no solo esto, sino que da una idea de cómo utilizar todas estas  
231 herramientas para un sin fin de aplicaciones.

232

## 233 5. Índice de referencias

234

- 235 • De la Fuente S (S.F). Regresión Logística. Universidad Autónoma de Madrid.
- 236 • Hoyos J. (2019). Metodología de clasificación de datos desbalanceados basado  
237 en método de submuestreo. Colombia.
- 238 • Pérez H. (2007). Los fraudes con tarjetas de crédito y sus efectos financieros.  
239 Caracas.
- 240 • Samuel A.L. (1988) Some Studies in Machine Learning Using the Game of  
241 Checkers. II—Recent Progress. In: Levy D.N.L. (eds) Computer Games I.  
242 Springer, New York, NY. [https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8716-9\\_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8716-9_1)
- 243 • Mitchell T.M. (1997). Machine Learning. Nueva York: McGraw-Hill.
- 244 • Sun Z., Song Q., Zhu X., Sun H., Xu B., and Zhou Y. (2018). “A novel ensemble  
245 method for classifying imbalanced data”.

# LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA VISTA A TRAVÉS DEL CONOCIMIENTO DE LOS PROFESORES

Huerta Vázquez Miguel Angel<sup>1,\*</sup>, Martínez Pérez Sandra Areli<sup>2</sup>, Albarrán Iturbe Laura  
Angélica<sup>3</sup>, Segovia Arrebillaga Carolina<sup>4</sup>  
<sup>1,2,3,4</sup> CCH-UNAM, Azcapotzalco. Av. Aquiles Serdán 2060  
Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco CDMX

IP-POSM036

## Resumen

*El Cuarteto del Conocimiento (KQ) propuesto por Tim Rowland y colaboradores es un marco teórico que sirve para mostrar el conocimiento del profesor acerca de la enseñanza que se muestra en el salón de clase. En esta ponencia se muestra cómo ayuda a caracterizar el conocimiento de un grupo de profesores del CCH-UNAM-Azcapotzalco cuando enseñan la función cuadrática de un problema aplicado del tema y cómo puede ser usado esta caracterización para mejorar la enseñanza en dicho tema en posteriores ocasiones.*

**Palabras clave:** Conocimiento del profesor, función cuadrática, reflexión docente.

## 1. Introducción

Una de las preocupaciones más antiguas sobre cómo mejorar la enseñanza, especialmente en matemáticas, es saber cuál es el componente clave para mejorarla. El conocimiento de la enseñanza ha sido un elemento de investigación para dicha mejora desde los años ochenta.

Las primeras investigaciones al respecto son las de Shulman (1986, 1987) cuyos trabajos son los primeros en centrar la investigación en el conocimiento del profesor, proponiendo tres dimensiones de dicho conocimiento: conocimiento del currículo, conocimiento del contenido de la materia (Subject Matter Knowledge SMK), y conocimiento pedagógico del contenido (Pedagogical Content Knowledge PCK).

Con estas dos últimas categorías que Shulman define se han elaborado varios marcos teóricos, específicos del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas, a continuación, se muestran algunos ejemplos.

Ball, Thames y Phelps (2008) construyen un marco en términos del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT), donde subdividen en las categorías conocimiento del contenido (SMK) y el conocimiento

<sup>1</sup> \*Autor para la correspondencia. E-mail: miguelangel.huertav@cch.unam.mx Tel. 55-28-78-69-82

37 pedagógico del contenido (PCK) en tres subcategorías para hacer un análisis más  
38 específico acerca del conocimiento del profesor de matemáticas.

39 Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) proponen el Cuarteto del Conocimiento (en  
40 inglés Knowledge Quartet KQ) en el que toman la investigación de Shulman para  
41 caracterizar el conocimiento que surge en la enseñanza en el aula y lo categorizan  
42 en cuatro dimensiones.

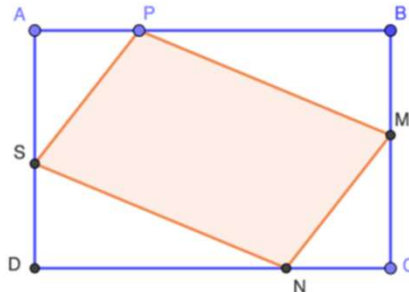
43 En particular este último marco teórico es el que se usa para el análisis de los datos  
44 que se presentan en este documento, que tiene como objetivo mostrar evidencias del  
45 conocimiento para la enseñanza de la función cuadrática de profesores del CCH  
46 Azcapotzalco, en el proceso de diseño, aplicación y reflexión final acerca de una  
47 secuencia didáctica del tema, para dicho propósito se analizan los datos obtenidos  
48 de los videos del ciclo descrito con el marco de Tim Rowland (KQ), en las que se  
49 muestran qué tipo de conocimientos van surgiendo desde el diseño hasta la reflexión  
50 final del proceso. Todo lo anterior puede servir para poder caracterizar el tipo de  
51 conocimientos de un profesor de nivel medio superior para mejorar la enseñanza de  
52 la función cuadrática.

## 53 **2. Metodología o desarrollo**

54 Un grupo de seis profesores de matemáticas del CCH-Azcapotzalco se reunieron con  
55 el fin de planear secuencias didácticas ya que consideran que el hacer estas  
56 actividades de manera colectiva podría ayudarles a mejorar la enseñanza de las  
57 matemáticas. La función cuadrática es el tema que el grupo de profesores eligen para  
58 hacer la secuencia que se analiza en esta ponencia que se encuentra en la  
59 asignatura de Matemáticas II en la Unidad II. Se elige ese tema porque es un tema  
60 recurrente en varios semestres del plan de estudios del Colegio. Para el análisis de  
61 este documento se documenta el trabajo de tres profesores: Sabrina, Matías, Tomás.

62 La secuencia didáctica elegida para el ciclo es el problema siguiente Fig. (1):

Dado el rectángulo  $ABCD$  con base de 6 cm y altura de 4 cm Sea  $P$  un punto en el lado  $\overline{AB}$ ,  $M$  un punto en el lado  $BC$ ,  $N$  un punto en  $CD$  y  $S$  un punto en  $DA$ , tal que las distancias de  $BM$ ,  $CN$ ,  $DS$  y  $AP$  son iguales. Obtener el área mínima del cuadrilátero que se forma con los puntos  $P$ ,  $M$ ,  $N$  y  $S$ .



63

64

Figura 1 Problema del área mínima

65 El orden de las etapas de las actividades se desarrolla de esta manera:

- 66 • Etapa 1 de planeación: la docente Sabrina propone la secuencia del problema
- 67 del área mínima del cuadrilátero a los profesores;
- 68 • Etapa 2 de aplicación: el docente Mateo aplica la secuencia;
- 69 • Etapa 3 de reflexión: los profesores revisan la aplicación de Mateo;
- 70 • Etapa 4 de aplicación: el docente Tomás aplica de nuevo la secuencia
- 71 • Etapa 5 de reflexión: los docentes observan lo hecho en el proceso para
- 72 asentar la secuencia didáctica final que posteriormente se puede aplicar.

73 Las etapas son grabadas y de ahí se obtienen los datos para hacer el análisis con el  
 74 cuarteto del conocimiento, que se describe a continuación:

75 2.1 El cuarteto del conocimiento de Rowland (KQ).

76

77 El Cuarteto del Conocimiento Knowledge Quartet (KQ) es un marco teórico para el  
 78 análisis y desarrollo de la enseñanza de las matemáticas. Desde la perspectiva de la  
 79 KQ, los conocimientos y creencias evidenciados en la enseñanza de las matemáticas  
 80 se pueden apreciar en cuatro dimensiones, denominadas fundamentación,  
 81 transformación, conexión y contingencia. (Rowland et al., 2014).

82 *Fundamentación:* Esta categoría consiste en los conocimientos, creencias y  
 83 comprensión adquiridos en la academia, en preparación (intencionada o no) para su  
 84 papel en el aula. Estos conocimientos y creencias informan de manera fundamental  
 85 las opciones y estrategias pedagógicas. Los componentes clave de este bagaje  
 86 teórico son: el conocimiento y la comprensión de las matemáticas en sí mismas y el  
 87 conocimiento de partes significativas de la literatura y el pensamiento que ha

88 resultado de la investigación sistemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de las  
89 matemáticas. El componente de las creencias se refiere a las convicciones y los  
90 valores de los futuros profesores. Dichas creencias suelen referirse a diferentes  
91 posiciones filosóficas sobre la naturaleza del conocimiento matemático, los  
92 propósitos de la educación matemática y las condiciones en las que los alumnos  
93 aprenden mejor las matemáticas.

94 *Transformación:* Esta categoría se refiere al conocimiento en acción tal como se  
95 demuestra tanto en la planificación de la enseñanza como en el acto mismo de  
96 enseñar. En el centro de esta categoría se encuentra la observación de Shulman de  
97 que la base de conocimientos para la enseñanza se distingue por "... la capacidad de  
98 un maestro para transformar el conocimiento del contenido que posee en formas  
99 pedagógicamente poderosas"(1987, p. 15). Como indica Shulman, la presentación de  
100 ideas a los aprendices implica su representación en forma de analogías,  
101 ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones (Shulman, 1986, p. 9).

102 *Conexión:* Esta categoría une ciertas elecciones y decisiones que se toman para las  
103 partes discretas del contenido matemático. Se refiere a la coherencia de la  
104 planificación o la enseñanza mostrada a lo largo de un episodio, lección o serie de  
105 lecciones. Nuestra concepción de coherencia incluye la secuenciación de temas de  
106 instrucción dentro y entre lecciones, incluida la ordenación de tareas y ejercicios que  
107 reflejan deliberaciones y elecciones que implican tanto el conocimiento de las  
108 conexiones estructurales dentro de las matemáticas como la conciencia de las  
109 demandas cognitivas relativas de diferentes temas y la contingencia de tareas.

110 *Contingencia:* Esta dimensión trata las situaciones que no se pudieron presuponer y  
111 planificar antes de las lecciones, es decir, las situaciones que son casi imposibles de  
112 planificar incluyen la desviación del currículo o la agenda, la respuesta a ideas  
113 inesperadas de los estudiantes, el uso de oportunidades que no podrían  
114 presuponerse antes de la enseñanza pero que aparecen en el proceso de enseñanza  
115 y las suposiciones del docente. En este sentido, la idea de que casi la mayoría de las  
116 situaciones en el ambiente de clase se pueden planificar, pero algunas no se pueden  
117 planificar, impulsó a los investigadores a crear esta unidad.

118 Con este marco se hace el análisis de lo hecho en las actividades aquí descritas.

### 119 **3. Resultados y análisis**

120 Para se describe cada etapa y se muestra para las etapas 1,2,4 tablas con ejemplos  
121 de cada las dimensiones del KQ y se complementa con los marcos de Shulman y  
122 Ball et. al

123

124 3.1 Etapa 1) de planeación: la profesora Sabrina propuso el problema que se  
 125 muestra en la Fig. 1, el cual está relacionado con el cálculo del área mínima de un  
 126 cuadrilátero con ciertas características. Este problema permite introducir aspectos  
 127 sobre la función cuadrática, así como poner sobre la mesa de discusión acerca de la  
 128 enseñanza de esa función. Ella ya había empleado este problema en sus clases para  
 129 estudiar la función cuadrática, ya que le permitió introducir varios elementos de este  
 130 concepto. Ver Tab. (1).

131

132

**Tabla 1 Dimensiones que aparecen en el episodio 1**

Dimensiones del KQ que aparecen en el episodio	Ejemplos Docente: Sabrina. Etapa 1.
Fundamentación	La docente Sabrina conoce la secuencia porque la ha aplicado varias veces, sabe que los estudiantes empiezan a dibujar para empezar a resolver la secuencia, y entiende cómo su aplicación permite que los estudiantes logren aprender aspectos de la función cuadrática, como la tabulación, graficación de la parábola asociada y el máximo o mínimo.
Conexión	Sabrina reconoce que la secuencia podría usarse para Matemáticas IV para el tema de funciones polinomiales para enseñar el dominio y el contradominio.
Transformación	Reconoce las tres representaciones de la función cuadrática.

133

134 Etapa 2) de aplicación, el docente Mateo aplica para poner a prueba la secuencia  
 135 didáctica estructurada en la Etapa 1, Tab. (2).

136

137

**Tabla 2 Dimensiones que aparecen en el episodio 2**

Dimensiones del KQ que aparecen en el episodio	Ejemplos Docente: Mateo. Etapa 2.
Fundamentación	Mateo explica de la manera correcta cómo obtener el área del cuadrilátero.
Transformación	Mateo explica con precisión cómo graficar, además que los estudiantes respeten las escalas y coloquen las etiquetas a los ejes.
Conexión	Un estudiante reconoce que la simetría de la tabla se traslada a la gráfica y Mateo lo hace notar a todos los estudiantes para que se den cuenta de esa característica que tiene la función cuadrática
Contingencia	Mateo se desvía de la agenda que tenía trazada esperando que los estudiantes dibujen el cuadrilátero PMNS conforme las especificaciones del problema $AP = BM = NC = DS$ , pero los estudiantes dibujan un cuadrilátero que no es el que él espera, ya que colocan los vértices como puntos medios del rectángulo, así que obliga de alguna manera a que los estudiantes dibujen el cuadrilátero esperado.
	Mateo pregunta qué relación hay entre la tabla y la gráfica, un alumno responde que tiene que ver con la ecuación cuadrática, a lo que Mateo contesta que entiende a qué se refiere el alumno, aunque la respuesta no es precisamente correcta explicará más adelante, Mateo después de unos minutos termina de responder, que una ecuación es una igualdad, y pide que sustituyan el valor $AP = x$ de alguna manera está hablando de la variación.

138

139 Etapa 3) de reflexión, se hace una reflexión colectiva de la actuación de Mateo en el  
 140 aula al poner a prueba la secuencia diseñada en la Etapa 1. En general, como era de  
 141 esperarse, debido a que Sabrina ha tenido experiencia directa con esta secuencia de  
 142 enseñanza, como ya se ha mencionado antes, es ella quien externa la mayoría de  
 143 las observaciones acerca de la actuación de Mateo. Tomás aprovecha para tomar  
 144 nota de las particularidades que Sabrina comenta con respecto a la actuación de  
 145 Mateo.

146  
 147 Etapa 4) de aplicación, el docente Tomás dio la clase, que constituye la aplicación de  
 148 la secuencia didáctica estructurada en la Etapa 1 y reflexionada en la etapa 3.  
 149 El momento de contingencia acerca del dibujo del cuadrilátero de Mateo se torna en  
 150 un momento de fundamentación para Tomás ya que toma nota de ese episodio y lo  
 151 incorpora a su planeación docente. Ver Tab. (3).

152  
 153  
 154  
 155  
 156 **Tabla 3 Dimensiones que aparecen en el episodio 4**

Dimensiones del KQ que aparecen en el episodio	Ejemplos Docentes: Tomás. Etapa 4.
Fundamentación	Tomás tiene planificado que los estudiantes dibujen el cuadrilátero teniendo como vértices los puntos medios de los lados del rectángulo. Así que cuestiona a los estudiantes haciéndoles ver la igualdad $AP = BM = NC = DS$ para que dibujen el cuadrilátero esperado.
Transformación	Explica la diferencia entre función y ecuación cuadrática, que en el problema es una forma de encontrar los valores AP teniendo un área dada. Tomás lleva a los estudiantes mediante preguntas para que obtengan el área del cuadrilátero.
Conexión	Tomás utiliza el interrogatorio ahora para recordar los conceptos de variable dependiente y variable independiente.

157  
 158  
 159  
 160  
 161  
 162 Etapa 5) de reflexión, en esta discusión final los profesores llegan a la conclusión de  
 163 que esta secuencia puede ser utilizada en cualquier instante de la unidad II, para la  
 164 asignatura de matemáticas II, ya que permite cubrir cualquier aprendizaje de esta  
 165 unidad. Consideran que pueden agregarle la manera de encontrar los coeficientes de  
 166 la función  $a, b, c, d, e$   $y = ax^2 + bx + c$ . Otro aspecto que consideran importante es  
 167 que los profesores deben dejar que los estudiantes fallen ya que es una manera de  
 168 motivar el aprendizaje.

169  
 170



#### 171 **4. Conclusiones**

172 El uso del marco teórico del cuarteto del conocimiento permite conocer el  
173 desempeño de los profesores en el salón de clase, a partir de sus conocimientos y  
174 creencias (dimensión de fundamentación), cómo transforman el conocimiento  
175 matemático al aula (dimensión de transformación), cómo conectan las diferentes  
176 lecciones de cursos anteriores o conceptos matemáticos de otras clases (dimensión  
177 de conexión) por último cómo reaccionan a situaciones inesperadas dentro del salón  
178 de clase (dimensión de contingencia).

179 En el caso de los profesores de estos profesores de matemáticas del CCH-  
180 Azcapotzalco, podemos decir que tienen conocimientos de la materia (SMK) acerca  
181 de la función cuadrática, y conocen muchos aspectos de su enseñanza  
182 (conocimiento pedagógico de la materia SMK) cómo lo diría Shulman; Pero el  
183 proceso de reflexión como los que hacen estos profesores para el diseño, aplicación  
184 y evaluación de secuencias didácticas, les permite enriquecer su conocimiento para  
185 la enseñanza de la función cuadrática, y se observa claramente que los profesores  
186 discuten cómo aplicar esta secuencia didáctica, comparten conocimiento.

187 Por ejemplo, tomemos el caso de la clase de Mateo, en su clase se presenta una  
188 situación de contingencia cuando tiene dificultades para que los estudiantes puedan  
189 dibujar de manera correcta el cuadrilátero, pero a final de cuentas él logra que lo  
190 dibujen, es una situación importante porque del entendimiento del problema depende  
191 que los estudiantes lo puedan expresar con un dibujo.

192 Tomás observa, toma nota de ese momento y lo incorpora como parte de su  
193 planeación de tal manera que tiene preparadas preguntas para los estudiantes en el  
194 caso de que tengan problemas para dibujar de manera correcta el cuadrilátero, y  
195 efectivamente ocurre, hace las preguntas y logra continuar con la planeación que  
196 tenía en mente.

197 Ocurre otra situación de contingencia para Mateo, en la que un alumno le pregunta  
198 que, si la parábola tenía que ver con la ecuación cuadrática, usa esta situación para  
199 introducir a los estudiantes en la diferencia entre función y ecuación cuadrática.

200 Tomás aprovecha ese momento para incorporar en un resumen el final de su clase  
201 acerca de la diferencia entre la función y la ecuación cuadrática, y lo usa para dar un  
202 ejemplo en la que con un área dada se puede obtener un valor AP, como una  
203 ecuación cuadrática.

204 Es importante recalcar que este tipo de análisis usando el cuarteto del conocimiento  
205 podría incorporarse en procesos de planeación, aplicación y evaluación de  
206 secuencias didácticas como una manera de analizar y mejorar la labor docente si  
207 todos los integrantes de grupos de profesores que hagan este tipo de actividades  
208 estén conscientes de cada una de las dimensiones de dicho cuarteto para que en  
209 futuras aplicaciones de secuencias didácticas puedan tener un bagaje de  
210 conocimientos para la enseñanza mucho más rico, que les permita mejores  
211 ejemplos en el aula, conexión a otras áreas de las matemáticas o de lecciones de  
212 estas y que sepan contestar de manera adecuada a preguntas o situaciones  
213 inesperadas que se puedan presentar en el aula.

## 214 5. Índice de referencias

- 215
- 216 • Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for  
217 Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–  
218 407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- 219 • Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary Teachers'  
220 Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of  
221 Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255–281.  
222 <https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>
- 223 • Rowland, T., Turner, F., & Thwaites, A. (2014). Research into teacher  
224 knowledge: A stimulus for development in mathematics teacher education  
225 practice. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 46(2), 317–  
226 328. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0564-9>
- 227 • Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching.  
228 *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.  
229 <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- 230 • Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New  
231 Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–23.  
232 <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- 233

## CONTROL DE CALIDAD PARA DETERMINAR CLORO EN EL LABORATORIO DE QUÍMICA AMBIENTAL EN FESC

Frida María León Rodríguez<sup>1,\*</sup>, Armando Aguilar Márquez<sup>2</sup>, Omar García León<sup>3</sup>,  
Miguel de Nazareth Pineda Becerril<sup>4</sup>  
<sup>1,2,3,4</sup> Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán  
Carretera Cuautitlán-Teoloyucan Km 2.5, Estado de México

AP-POSM038

### Resumen

Uno de los requisitos fundamentales de los laboratorios analíticos a nivel mundial, es contar con un sistema de control de calidad, que asegure que las determinaciones sean buenas estimaciones del contenido real de las muestras. Para tal efecto, es imprescindible que: el método, el equipo, material, analista, entre otros, se ajusten a pruebas estadísticas.

En el laboratorio de Química Ambiental de Campo 4 de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (FESC), se han llevado a cabo análisis de muestras de tejido vegetal, enviadas por la Universidad de Wageningen en Holanda, en un programa de intercambio de muestras, en donde participan una gran cantidad de laboratorios a nivel mundial, para determinar un sinnúmero de elementos químicos contenidos en los vegetales.

En este estudio se presentan los resultados de la determinación potenciométrica de cloro en 2 muestras de referencia, 883 y 875; estos se compararon con otros 15 laboratorios, para tal efecto se construyeron las gráficas de control de calidad para la media y desviación estándar, basadas en dos muestras por laboratorio y tres determinaciones por muestra. Comprobando así que en el laboratorio se realizó la determinación dentro de los límites de control.

En el histograma de los promedios de cloro se ubican en la barra modal. Al realizar la prueba de normalidad de Anderson- Darling para medias muestrales se acepta la normalidad con  $p$  menor de 0.102. En resumen, con las gráficas de comparación con los otros laboratorios se confirmó la calidad de las determinaciones.

**Palabras clave:** Calidad, Laboratorio, Gráficas, Potenciometría, Cloro.

### 1. Introducción

El control de calidad de un laboratorio de análisis químico (Miller) , es un mecanismo diseñado para detectar y corregir posibles deficiencias analíticas internas, antes de emitir un resultado que es básicamente una medida de precisión. Tiene como finalidad aumentar la calidad y fiabilidad de los resultados obtenidos por uno o un

<sup>1</sup> \*Autor para la correspondencia. E-mail: fridam@unam.mx

44 conjunto de los varios procedimientos que se utilizan y verificar que el resultado se  
45 mantiene invariable a lo largo del tiempo.

46

47 Un aspecto importante del sistema de gestión de calidad de un laboratorio, es la  
48 planificación y ejecución de actividades de control de calidad, con el objetivo de  
49 asegurar que los resultados producidos por el laboratorio son confiables, para lo cual,  
50 es necesario llevar a cabo dos tipos de control, uno interno y otro externo.

51

52 En el caso del control interno, es importante considerar aspectos tales como: la  
53 limpieza del material, la calidad del agua destilada que se usa, el tipo y clase de  
54 material de laboratorio, la calidad de los reactivos, la calibración del equipo  
55 instrumental, la identificación de problemas de contaminación y la capacidad de  
56 trabajo del personal que realizan las determinaciones. Sumado a esto, se requiere  
57 monitorear el desempeño de un método de ensayo en forma continua.

58

59 La forma mas efectiva de monitorear los resultados obtenidos en el análisis de una  
60 muestra de control, es a través de la construcción de gráficas o cartas de control  
61 (Miller).

62

63 Para la evaluación externa de la calidad se implementan Ensayos de Aptitud, que  
64 tienen como objetivo proveer a un laboratorio un monitoreo continuo e independiente  
65 de su desempeño.

66

67 Un ensayo de aptitud (Novozamsky et al) incluye las siguientes actividades:

68

- El organizador distribuye las muestras a los participantes.
- Los participantes analizan las muestras con el método de su elección y envían los resultados al organizador.
- El organizador lleva a cabo el análisis estadístico de los resultados y determina para cada participante un parámetro de desempeño.
- El organizador prepara un informe, donde cada participante es identificado con un código.
- Los laboratorios participantes analizan si su desempeño ha sido satisfactorio y si no fuera así deberán investigar las causas.

77

78

## 79 2. Metodología o desarrollo

80

81 1.-Digestión de las muestras enviadas por la Universidad de Wageningen Holanda.

82

83 Para poder evaluar el contenido de diferentes elementos químicos en tejido vegetal  
84 se debe llevar a cabo la digestión de la muestra, la cual permite pasarlos a dilución,  
85 en este laboratorio se realizó la digestión ácida de una muestra de aproximadamente  
86 0.3 g en presencia de un oxidante fuerte, en este caso peróxido de hidrógeno.

87

88 Para obtener óptimos resultados, es necesario conocer el peso exacto de la muestra  
89 para lo cual se utiliza de la balanza analítica de alta precisión. El laboratorio debe  
90 estar equipado con una balanza de 200 - 300 g de capacidad y una sensibilidad de  
91 0,1 g, cada vez que se usa se deben limpiar los platillos de pesada. La exactitud de  
92 las balanzas debe verificarse cada tres meses con pesas calibradas y conviene que  
93 frecuentemente se haga una limpieza y calibración de estas.

94  
95 La muestra se coloca en un matraz volumétrico de 50ml, se añaden 2.5 ml de ácido  
96 sulfúrico, se coloca en una parrilla de calentamiento controlando la temperatura a  
97 280<sup>0</sup>C y se añaden 5 gotas el peróxido de hidrógeno evitando que la espuma se  
98 derrame, se deja enfriar y calienta consecutivamente durante 10 min con 5 gotas de  
99 peróxido. Cabe recalcar que la calidad del oxidante es importante ya que la oxidación  
100 total de la muestra depende de ello. La digestión de la muestra termina en cuanto la  
101 solución se torna incolora. El matraz se deja enfriar a temperatura ambiente y se  
102 afora a los 50ml.

## 103 Congreso Internacional

### 104 2.-Determinación de cloruros potenciométricamente.

105

106 Antes de realizar cualquier medición es necesario calibrar el instrumento que  
107 consiste en medir varias muestras de valores distintos conocidos y exactos, y  
108 compararlos contra patrones externos universalmente aceptados. Para poder calibrar  
109 son necesarios estándares o calibradores, estas son sustancias de referencia de las  
110 que se conoce su valor y es considerado exacto. La calibración del instrumento  
111 analítico consiste en medir cada calibrador como mínimo 2 veces y como máximo 6.  
112 En caso de que el resultado no sea el mismo no se continúa con la calibración pues  
113 el sistema debe ser preciso. Dado que al calibrar lo que se está realizando es una  
114 comparación, la exactitud del instrumento dependerá de la exactitud del calibrador.

115  
116 Para calibrar el potenciómetro se utilizan soluciones buffer de referencia de pH  
117 conocido, posteriormente se cambia el electrodo para determinar el potencial redox y  
118 a continuación se coloca una alícuota de 5ml de la solución obtenida de la digestión  
119 ácida, introduciendo el electrodo y valorando con una solución de nitrato de plata de  
120 concentración aproximadamente 0.05N; conforme se añade la solución de plata se  
121 anotan las lecturas del potencial (mV), para construir la curva de valoración y  
122 conocer el punto estequiométrico.

123  
124 Con el punto estequiométrico se conoce el volumen requerido necesario para formar  
125 el cloruro de plata, con el que se realizan los cálculos del contenido de cloro en la  
126 muestra de tejido vegetal.

127

$$mmol/Kg Cl = \frac{1000 V_{Ag} M_{Ag}}{\text{peso de la muestra}}$$

128

129 Los resultados son enviados, en formatos específicos y son publicados con el resto  
130 de laboratorios.

131

132 El control de calidad externo es llevado a cabo por la Universidad de Wageningen  
133 Holanda, quienes envían las muestras de tejido vegetal por correo, las cuales son  
134 identificadas con un número sin que se indiquen de cuál se trata, siempre se incluye  
135 una muestra patrón cuyo contenido de los diferentes elementos químicos es  
136 conocido y con el cual se muestran los resultados en este trabajo.

137

### 138 3. Resultados y análisis

139

140 Con la participación de la FESC en el Programa Internacional *Plant Analytical*  
141 *Exchange* (IPE), son enviadas a los laboratorios de Química Ambiental de la Sección  
142 de Química Inorgánica, 6 muestras ciegas de tejido vegetal, entre las cuales se  
143 encuentra alguna ya sea de calabaza blanca (muestra 875) u otra de clavel (muestra  
144 883), que suelen ser muestras certificadas (Novozamsky) cuyo contenido ha sido  
145 evaluado para poder convertirse en muestras patrón.

146

147 Las muestras son procesadas como se indica en apartado anterior en donde se  
148 describe, en forma general, el proceso de digestión, la determinación analítica y  
149 cálculos respectivos.

150 En diferentes periodos, los resultados obtenidos y enviados se encuentran en la  
151 siguiente Tab. (1) (IPE).

152

**Tabla 1. Contenido de cloro en las muestras vegetales**

Muestra 875 $mmol/Kg Cl$	Muestra 883 $mmol/Kg Cl$
50.1	85
57.0	71.2
63.5	73
52.6	75
54.5	77

153

154

155 Los resultados son enviados para su publicación y analizados estadísticamente,  
156 comparando los resultados con más de 200 laboratorios de 67 países participantes.

157

158 En el reporte, ya son identificadas las muestras certificadas con los números 875  
159 para calabaza blanca y con el 883 para clavel e integran los cálculos estadísticos de  
160 cada determinación y para cada laboratorio, informando que la media para las  
161 muestras respectivamente son 59.74, y 78.01 mientras que la desviación estándar es  
162 de 8.32 y 7.78 con 23 laboratorios participantes para esta cuantificación (University  
163 Wageningen).

164

#### 165 **4. Conclusiones**

166

167 Al revisar el análisis estadístico publicado por la Universidad de Wageningen, se  
168 constató que los resultados enviados tienen validez, se encuentran dentro de los  
169 valores estándares y cumplen con el control de calidad externo.

170 Al construir los gráficos de control de las determinaciones, encontramos que los  
171 valores están dentro del rango de dicho gráfico, lo que confirma que el control de  
172 calidad interno es aprobatorio.

173

#### 174 **5. Índice de referencias**

175

- 176 • Miller James N., Miller Jane C.,(2002), *Estadística y Quimiometría para*  
177 *Química Analítica*, Prentice Hall, 4ª Edición.
- 178 • Novozamsky et al., (1993), Certifications of cabbage and carnation samples  
179 and their use in an international proficiency study, *Journal Analytical*  
180 *Chemistry*. 35 198-201.
- 181 • Wageningen *Evaluating Programmers for Analytical Laboratories*, IPE,  
182 Department of Soil Science and Plant Nutrition Wageningen Agricultural  
183 University-The Netherlands. Bimonthly and annual report.

# INVESTIGACIÓN EXPLORATORIA SOBRE LA CAPACIDAD DE RESILIENCIA EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN ADMINISTRACIÓN

Celia Rodríguez Chávez<sup>1,\*</sup>, Omar García León<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>FESC-UNAM Km. 2.5 Cuautitlán Teoloyucan, Cuautitlán Izcalli, Edo. Mex. CP 54714

AP-POSM039

## Resumen

*El objetivo de la investigación fue medir la capacidad de resiliencia de los alumnos de primer semestre de la licenciatura en administración. Diversos investigadores han desarrollado instrumentos para medir la resiliencia entendida como capacidad para superar las adversidades. De acuerdo a lo anterior se aplicó la Escala de Wagnild y Young para medir el nivel de resiliencia en general y cinco componentes de la misma: confianza en sí mismo, ecuanimidad, sentirse bien solo, satisfacción personal y perseverancia, de los alumnos de administración. El análisis estadístico se aplicó para la obtención de muestra, recolección, recuento, presentación y análisis de datos. Los resultados obtenidos indicaron para la población general, población femenina y población masculina un nivel ligeramente alto de resiliencia y para los componentes en orden descendente: sentirse bien solo, confianza en sí mismo, satisfacción personal, perseverancia y ecuanimidad que indican niveles de resiliencia ligeramente alta, resiliencia mínima hasta resiliencia incipiente. Estos resultados indican que los alumnos han podido sortear las situaciones adversas que les ha tocado vivir en la situación actual y poder iniciar estudios universitarios. Se presentan sugerencias y recomendaciones para promover el desarrollo de una mayor capacidad de resiliencia en los alumnos a través de programas de intervención, introducir contenidos en las asignaturas referentes a desarrollar dicha capacidad y capacitación de los docentes, dada su importancia en el desarrollo personal y laboral del futuro egresado.*

**Palabras clave:** investigación, resiliencia, alumnos, administración.

## 1. Introducción

La concepción de resiliencia se refiere al desarrollo de la capacidad del ser humano para enfrentar las adversidades y salir transformado positivamente por ellas según la revisión conceptual de Arcelay y Avilés (2014). Este concepto surge de la clasificación de los estudios realizada por Henderson, citado por Martínez (2020), a partir de la observación de tres tipos de fenómenos: 1) resultados positivos de adaptación en la edad adulta de niños que vivieron contextos de alto riesgo, como pobreza crónica o drogadicción parental, 2) recuperación de situaciones traumáticas tales como guerras y campos de concentración, 3) mantenimiento de las capacidades personales en situación de estrés prolongado ante situaciones adversas. De acuerdo a una revisión bibliográfica realizada en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la UNAM, no se encontraron trabajos de investigación sobre resiliencia en los estudiantes por lo que los autores decidieron

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: celiarodriguezchavez@hotmail.com



45 realizar un estudio exploratorio de esta importante temática. El estudio planteó la  
46 interrogante acerca de si los estudiantes de la licenciatura de administración poseen  
47 la capacidad denominada resiliencia para afrontar situaciones adversas. En  
48 consonancia con lo anterior, el objetivo fue determinar el nivel de resiliencia y sus  
49 componentes a nivel de la población total y diferencias por género en los estudiantes  
50 de la licenciatura de administración de primer ingreso de la Facultad de Estudios  
51 Superiores Cuautitlán de la UNAM..

52

## 53 2. Metodología

54

### 55 2.1 Instrumento

56

57 Se utilizó el instrumento denominado “Escala de resiliencia” de Wagnild y Young,  
58 descrito en la investigación realizada por García, (2015), elaborado para medir  
59 resiliencia en estudiantes de educación superior. Los autores de la escala definieron  
60 la resiliencia como la capacidad de moderar el efecto negativo del estrés así como  
61 fomentar la adaptación en la cual la persona hace las cosas bien a pesar de la  
62 adversidad sin repercusiones negativas posteriores. El instrumento consta de 25  
63 ítems, los cuales puntúan en una escala de Likert, en donde se le solicitó al sujeto  
64 elegir una entre siete respuestas por ítem, marcando 1 como máximo desacuerdo, al  
65 7, indicador de máximo acuerdo. La valoración de resiliente se tomó de 4 a 7.

66

67 **Tabla1. Valoración de las respuestas con el signo “+”indicando intensidad de acuerdo o**  
68 **desacuerdo**

69

Respuesta al ítem	Valor numérico	Nivel
En desacuerdo +++	1	No resiliente
En desacuerdo ++	2	No resiliente
En desacuerdo +	3	No resiliente
Ni desacuerdo, ni acuerdo	4	Resiliencia incipiente
De acuerdo +	5	Resiliencia mínima
De acuerdo ++	6	Resiliencia ligeramente alta
De acuerdo +++	7	Resiliencia alta

70

71 La escala determina el nivel de resiliencia en general y además permite obtener  
72 información de cinco componentes de resiliencia:

73 1. *Satisfacción personal*. La persona comprende el significado de la vida y su deber  
74 de contribuir a la misma, lo cual le permite afrontar adversidades.

75 2. *Ecuanimidad*. La persona denota una perspectiva balanceada de la propia vida  
76 tomando los acontecimientos desfavorables con relativa tranquilidad, sin permitir que  
77 la adversidad le afecte de manera negativa.

78 3. *Sentirse bien solo*. La persona es consciente de su libertad, puede disfrutar de la  
79 compañía de otros y elegir tiempo para estar consigo misma

80 4. *Confianza en sí mismo*. La persona tiene percepción de sus capacidades y por lo  
81 tanto, valora sus recursos psicológicos para enfrentar adversidades.

82 5. *Perseverancia*. La persona presenta autodisciplina y es persistente ante la adver-  
83 sidad y el desaliento, manteniendo un fuerte deseo de logro.

84 La ventaja de este instrumento es doble, ya que permite medir el nivel de resiliencia  
85 general y los rasgos de resiliencia en puntos concretos que pueden servir de  
86 conocimiento para desarrollarlos y elevar el nivel de resiliencia.

87

88 2.1.1 Obtención de muestra

89

90 Se utilizó el método estadístico para la obtención de muestra, recolección, recuento,  
91 presentación y análisis de datos. Los sujetos del estudio fueron 576 alumnos  
92 inscritos en el primer semestre de la carrera de Licenciado en Administración,  
93 durante el semestre 2021-1, de los cuales 275 son mujeres y 301 son hombres. El  
94 tamaño de muestra se obtuvo a partir de la siguiente Ec. (1):  
95

$$96 \quad n = \frac{Nz_0^2 pq}{(N-1)e^2 + z_0^2 pq} \quad n = \frac{576(1.96)^2 (0.9)(0.1)}{(576-1)(0.0586)^2 + (1.96)^2 (0.9)(0.1)} \cong 86$$

97

98 En donde:

99

100 N = 576, total de alumnos inscritos en el primer semestre de la carrera de Licenciado  
101 en Administración durante el semestre 2021-1.

102  $z_0 = 1.96$ , valor obtenido de la tabla de las áreas bajo la curva normal que  
103 corresponde a un nivel de confianza del 95%.

104  $p = 0.9$  proporción favorable de respuesta

105  $q = 1 - 0.9 = 0.1$  proporción no favorable de respuesta

106  $e = 5.86\%$  error máximo permitido.

107 De acuerdo al número de mujeres=275 y número de hombres=238, la muestra se  
108 distribuirá proporcionalmente de acuerdo a las siguientes Ecs. (2)-(3):  
109

110

$$110 \quad n_m = \frac{n N_m}{N} = \frac{(86)(275)}{576} = 41 \text{ mujeres} \quad n_h = \frac{n N_h}{N} = \frac{(86)(301)}{576} = 45 \text{ hombres}$$

111

### 112 3. Resultados y análisis

113

114 A partir de los resultados obtenidos se presenta el análisis sobre la resiliencia.  
115

116  
117

**Tabla 2. Resultado del nivel de Resiliencia para población total y por género**

Puntaje medio población total	Puntaje población hombres	Puntaje población mujeres
5.727	5.720	5.732

118

119 De acuerdo a los criterios de valoración de la Tab. (2), para la población general y  
 120 por género se observó en los resultados un puntaje medio de 5.7 lo cual reveló en  
 121 los estudiantes un nivel mínimo de resiliencia.

122 En cuanto a los resultados obtenidos para los componentes de la resiliencia en la  
 123 población total y por género se presentan los puntajes de mayor a menor en la  
 124 siguiente tabla:

125

**Tabla 3. Puntajes obtenidos de mayor a menor en los componentes de la resiliencia para la población total y por género**

126

127

128

Componentes	Total	Mujeres	Hombres
Sentirse bien solo	6.155	6.081	6.222
Confianza en sí mismo	5.958	5.965	5.952
Satisfacción personal	5.843	5.854	5.833
Perseverancia	5.673	5.662	5.682
Ecuanimidad	4.978	4.988	4.967

129

130 Estos puntajes de mayor a menor se analizan a continuación:

131

132 El componente *Sentirse bien solo* obtuvo la valoración más alta con un puntaje  
 133 medio de 6.1, indicador de inicio de resiliencia ligeramente alta, de acuerdo a la Tab.  
 134 (3). En cuanto al género, el puntaje medio indicó una diferencia superior a dos  
 135 décimas para los hombres (6.2) respecto a las mujeres (6.0). Los estudiantes  
 136 denotaron la capacidad de sentirse bien a solas sin depender de la compañía de  
 137 otros, eligiendo tiempo para estar consigo mismos.

138

139 El segundo lugar lo obtuvo el componente *Confianza en sí mismo* referido a la  
 140 consciencia de la persona de sus capacidades para enfrentar las adversidades, se  
 141 colocó en un nivel de resiliencia mínima con un puntaje medio de 5.9 sin diferencia  
 142 de género. Se observó una cercanía al nivel próximo de resiliencia ligeramente alta.

143

144 En tercer lugar se colocó el componente referido a poseer un significado de la vida  
 145 con la conciencia de contribuir y no solo de recibir de la misma denominado  
 146 *Satisfacción personal*, el cual presentó un puntaje medio de 5.8 para la población  
 147 total y sin diferencia de género, lo cual indicó un nivel de resiliencia mínima próximo  
 148 al nivel de resiliencia ligeramente alta.

149

150 El cuarto lugar le correspondió al componente *Perseverancia* entendido como la  
 151 actitud de disciplina y persistencia para lograr metas a pesar de las dificultades. Este

152 componente obtuvo un puntaje de 5.6 para la población total, sin diferencia de  
153 género, indicador de resiliencia mínima.

154

155 El componente *Ecuanimidad* alcanzó el último y quinto lugar con un puntaje de 4.9  
156 para la población total sin diferencia de género. Este resultado indica resiliencia  
157 incipiente e indica que los estudiantes de la población investigada son afectados en  
158 su situación anímica por las situaciones adversas que han tenido que enfrentar. Esto  
159 puede asociarse a la situación actual de la pandemia.

160

#### 161 4. Conclusiones

162

163 A partir de los resultados del análisis anterior, para la población estudiada se  
164 presentan las siguientes conclusiones:

165 • El puntaje obtenido referente a la característica general de resiliencia para la  
166 población en general y por género indican un nivel mínimo de esta capacidad.

167 • Los puntajes obtenidos en los componentes para la población total y por género  
168 permitieron desglosar las diferencias de resiliencia en un rango de 6.1 a 4.9. El  
169 componente que encabezó el nivel más alto, indicador de resiliencia ligeramente alta,  
170 *Sentirse bien solo* (6.1), fue continuado en orden descendente por los componentes  
171 *Confianza en sí mismo* (5.9), *Satisfacción personal* (5.8) y *Perseverancia* (5.6),  
172 incluidos en el nivel de valoración de resiliencia mínima. El componente con más  
173 bajo puntaje fue *Ecuanimidad* con 4.9, lo cual indicó un nivel de resiliencia incipiente  
174 ya que la persona no posee el equilibrio anímico suficiente ante las situaciones  
175 adversas.

176 • Los resultados obtenidos en el estudio indicaron el logro del cumplimiento del  
177 objetivo, ya que se pudo determinar el nivel de resiliencia en general así como los  
178 niveles de los componentes de resiliencia en la población de estudiantes de primer  
179 ingreso de la licenciatura en administración de la Facultad de Estudios Superiores  
180 Cuautitlán de la UNAM.

181 • Los resultados de los estudiantes de la población estudiada mostraron que  
182 aunque su nivel de capacidad de resiliencia y sus componentes no son muy altos,  
183 por lo menos les ha permitido llegar al inicio de estudios universitarios, tomando en  
184 cuenta la situación vivida debida a las circunstancias actuales.

185 • Un estudio sobre resiliencia (Sanjuan, Landeros y Cossio, 2018) señala que la  
186 resiliencia engloba capacidades adquiridas por el individuo en interacción con su  
187 contexto, que le permiten superar las adversidades, por lo cual se puede afirmar que  
188 su adquisición es un proceso. Montoya (2019) marca para el proceso resiliente tres  
189 etapas: resistir, aprender, trascender.

190 • Se coincide con la propuesta de Meneghel et al. (2019) en la construcción de  
191 resiliencia para estudiantes universitarios a través de aprender el desarrollo de  
192 estrategias de afrontamiento durante su formación académica.

193 • El contexto universitario puede convertirse en promotor del aprendizaje de la  
194 resiliencia a través de su inclusión en el curriculum y por lo tanto en los planes y

195 programas de estudio de las licenciaturas dado que la resiliencia es una capacidad  
196 muy importante en el desarrollo personal y profesional del futuro egresado.

197 • Se pedirá a las instancias correspondientes realizar una investigación para esta-  
198 blecer el nivel de resiliencia en la población estudiantil de las diferentes licenciaturas  
199 de la unidad multidisciplinaria.

200 • Se propondrá llevar a cabo el diseño y puesta en marcha de un plan estratégico  
201 de prevención e intervención dirigido a la población estudiantil universitaria, tal como  
202 proponen Flores y Barreto (2018) que permita abordar esta temática y otras señala-  
203 das por los autores en otros trabajos sobre problemáticas significativas que viven los  
204 estudiantes de licenciatura.

205 • Se propondrá como parte importante de dicho plan, el diseño de un programa de  
206 impartición de cursos y talleres sobre resiliencia para los estudiantes que posibiliten  
207 el aprendizaje de estrategias de afrontamiento para superar diferentes tipos de situa-  
208 ciones que impliquen adversidad.

209 • Se pedirá que las instancias correspondientes de cursos de formación para do-  
210 centes y programas de actualización académica incluyan el tema de la resiliencia y  
211 como promoverla en los estudiantes.

212 • En relación con lo anterior, se solicitará que los docentes estén capacitados  
213 para que a través de las tutorías o cuando los estudiantes los consulten, proporci-  
214 onen consejo u orientación sobre como el estudiante desarrolle recursos personales  
215 para superar situaciones adversas que le favorezcan su capacidad resiliente.

216

## 217 5. Índice de referencias

218

### 219 Revistas

220 • Arcelay, A. y Avilés, E. J. (2014). Conocimientos y experiencias de candidatos  
221 a maestros sobre la aplicación de prácticas promotoras de resiliencia  
222 educativa. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*,  
223 14(3), 1-33. Obtenido en julio de 2021 de la dirección:  
224 <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44732048013>

225 • Flores, N. y Barreto, M. (octubre de 2018). Violencia en el noviazgo entre  
226 estudiantes de la Universidad Nacional Autónoma de México. Un estudio  
227 mixto. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, 9(26), 42-63. Obtenido  
228 en agosto de 2021 de la dirección:  
229 <https://dx.doi.org/10.22201/iissue.20072872e.2018.26.290>

230 • Martínez, T. (2020). Resiliencia docente: un estudio de caso en una  
231 preparatoria universitaria. *IE Revista de investigación educativa de la*  
232 *REDIECH*, 11. 1-20. Obtenido en mayo de 2021 de la dirección:  
233 <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=521662150035>

234 • Meneghel, I., Martínez, I. M., Salanova, M. y De Wite, H. (2019). Promoting  
235 academic satisfaction and performance: Building academic resilience through  
236 coping strategies. *Psychology in the schools* 56. 875-890. Obtenido en mayo  
237 de 2021 de la dirección:

238 <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/pits.22253>

- 239 • Sanjuan, X. S., Landeros, E. A. y Cossio, P. E. (2018). Validez de una escala  
240 de resiliencia (RESI-M) en mujeres indígenas de México. *Cadernos de saúde*  
241 *pública*, 34(10). Obtenido en mayo de 2021 de la dirección:  
242 <https://www.scielo.br/j/csp/a/8GVswRr6XJx3zzrh3yBR7cs/?lang=es>  
243

244 Información en línea

- 245 • García, M. S. (enero de 2015). *Características resilientes presentadas por los*  
246 *oficiales de la Procuraduría de los Derechos Humanos de Guatemala, ante la*  
247 *atención de denuncias*. Tesis de grado. Universidad Rafael Landívar,  
248 Guatemala. Obtenido en mayo de 2021 de la dirección:  
249 <http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesiseortiz/2015/05/42/Garcia-Samuel.pdf>  
250 • Montoya, J. (septiembre de 2019). *Resiliencia comunitaria: resistir, aprender,*  
251 *trascender*. Conferencia en el Congreso de Resiliencia en Rosario, Argentina.  
252 Obtenido en noviembre de 2021 de la dirección:  
253 <https://youtu.be/7HjJ3Zivo4U>  
254

Congreso Internacional  
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

# USO DE LAS TIC'S COMO APOYO EN LA ENSEÑANZA DEL TEMA DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Pineda Becerril Miguel de Nazareth<sup>1,\*</sup>, García León Omar<sup>2</sup>, Aguilar Márquez Armando<sup>3</sup>, León Rodríguez Frida<sup>4</sup> y Vega Becerril Hector Adrian<sup>5</sup>.  
<sup>1,2,3,4,5</sup> *Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. Carretera Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5, Colonia San Sebastián Xhala. Cuautitlán Izcalli, Estado de México, C. P. 54714.*

EN-POSM040

## Resumen

Las distribuciones de probabilidad describen lo que probablemente sucederá, en vez de lo que en realidad sucedió, y a menudo se presentan en el formato de una gráfica, tabla o fórmula. Las distribuciones de Probabilidad que se le enseñan en las asignaturas de Estadística que se imparten en la FES-Cuautitlán son: Distribución Binomial, Distribución de Poisson, Distribución Hipergeométrica y Distribución Normal. En el presente trabajo se planteo a los alumnos la enseñanza de este importante tema mediante tres métodos distintos, uno mediante la forma tradicional, es decir realizando los cálculos en forma manual, otro usando software especializado, en este caso se utilizó MINITAB y por ultimo usando una calculadora virtual, es decir en un sitio web especializado en estadística, la enseñanza de estos tres métodos para la enseñanza del tema de distribuciones de probabilidad fue con la finalidad de reforzar el aprendizaje con el uso de las nuevas tecnologías y poner mayor énfasis en la interpretación de los resultados; ya que se tiene una ventaja al usar las nuevas tecnologías en la obtención de resultados.

**Palabras clave:** Distribuciones de probabilidad, Probabilidad, Tecnologías de la información.

## 1. Introducción

Una variable aleatoria es una descripción numérica del resultado de un experimento, es decir, una variable aleatoria asocia un valor numérico con cada resultado experimental posible. Se puede clasificar una variable aleatoria como discreta o continua, dependiendo de los valores numéricos que esta toma. Una variable aleatoria que puede asumir una cantidad finita de valores o una sucesión infinita de valores, se le llama variable aleatoria discreta.

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una descripción de las probabilidades asociadas con los valores posibles. Para una variable aleatoria discreta, que es el tema de este trabajo, es común especificar la distribución con una lista de valores posibles junto con la probabilidad de cada uno; en algunos casos, resulta conveniente expresar la probabilidad en términos de una fórmula.

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: mnazarethp@gmail.com

44 La distribución continua de probabilidad más importante de toda la estadística es, sin  
 45 duda alguna, la distribución normal. La importancia de esta distribución se debe a  
 46 que describe con gran aproximación la distribución de las variables asociadas con  
 47 muchos fenómenos de la naturaleza. Bajo ciertas condiciones, la distribución normal  
 48 constituye una buena aproximación a otras distribuciones de probabilidad, como la  
 49 Binomial y la de Poisson.

50  
 51 En el presente trabajo se planteo a los alumnos la enseñanza de este importante  
 52 tema mediante tres métodos distintos, uno mediante la forma tradicional, otro usando  
 53 software y por último usando una calculadora virtual, esto es con la finalidad de  
 54 reforzar el aprendizaje con el uso de las nuevas tecnologías.

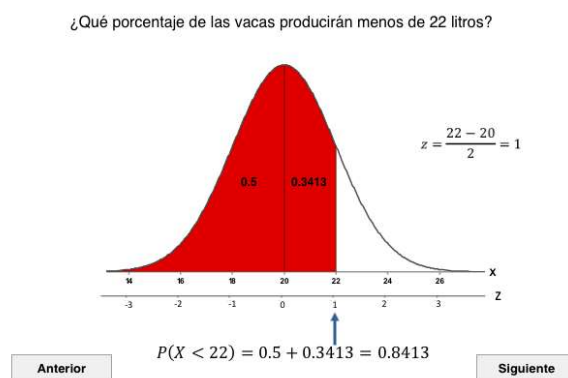
55

## 56 2. Metodología y Desarrollo

57

58 La distribución normal (en ocasiones llamada distribución gaussiana) es la  
 59 distribución continua que se utiliza más comúnmente en estadística. La distribución  
 60 normal es de vital importancia en estadística por tres razones principales: Muchas  
 61 variables continuas comunes en la vida cotidiana tienen distribuciones que se  
 62 asemejan estrechamente a la distribución normal. La distribución normal sirve para  
 63 acercarse a diversas distribuciones de probabilidad discreta, como la distribución  
 64 binomial y la distribución de Poisson. La distribución normal proporciona la base para  
 65 la estadística inferencial clásica por su relación con el teorema de límite central. La  
 66 primera forma planteada fue la de calcular las distribuciones de probabilidades  
 67 mediante el uso de las fórmulas y con el de las diferentes tablas, la Fig. (1) muestra  
 68 la enseñanza de la forma tradicional del tema de distribución normal.

69



70

71

72

**Figura 1. Área bajo la curva de la distribución normal**

73 En la actualidad las computadoras son una herramienta común para alumnos  
 74 universitarios de todas las disciplinas. La mayor parte de ellos son consumados  
 75 usuarios de procesadores de texto, hojas de cálculo y bases de datos, y no tienen  
 76 problema para navegar a través de paquetes de software en el ambiente Windows.



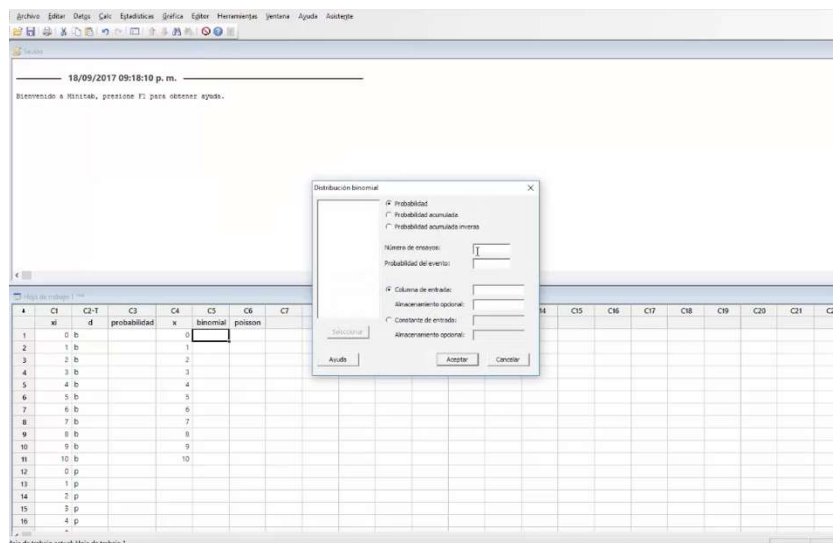
77 Sin embargo, creemos que las ventajas de la tecnología de las computadoras no  
 78 deben convertir el análisis estadístico en una “caja negra”.

79  
 80 Dentro de este contexto se planteo a los alumnos el segundo método que fue el de  
 81 utilizar un software estadístico, el cual fue MINITAB, en este programa se pueden  
 82 obtener de manera sencilla y amigable los resultados de las distribuciones de  
 83 probabilidad. Para calcular las probabilidades asociadas a una distribución de  
 84 probabilidad Binomial y de Poisson, lo primero es realizar en una columna los valores  
 85 de la variable aleatoria discreta, después se selecciona la opción de una distribución  
 86 binomial o Poisson, se selecciona la columna donde están los valores de la variable  
 87 aleatoria y en automático obtendremos las probabilidades asociadas a esas variables  
 88 aleatorias dependiendo de las probabilidades de inicio.

89  
 90 Dentro de este método de enseñanza una de las principales limitantes es el costo de  
 91 la licencia del software y el otro problema que se presento son las pocas  
 92 computadoras que se tienen en las salas de computo, pero al superar estas  
 93 limitantes los alumnos mostraron bastante interés en la enseñanza mediante este  
 94 método.

95  
 96 Consideramos que este método de enseñanza proporciona a los alumnos la  
 97 tecnología para que se den más tiempo para el razonamiento estadístico, así como la  
 98 comprensión e interpretación de resultados. En la Fig. (2) se muestra como se  
 99 obtienen los resultados de las probabilidades asociadas a las distribuciones de  
 100 probabilidad binomial y de Poisson.

101  
 102  
 103



**Figura 2. Cálculo de probabilidades usando MINITAB**

104  
 105  
 106  
 107

108 La distribución binomial es una de las distribuciones de probabilidad que se  
109 encuentra con más frecuencia en la estadística aplicada. La distribución se obtiene a  
110 partir de un proceso conocido como ensayo de Bernoulli, en honor del matemático  
111 suizo James Bernoulli (1654- 1705), quien hizo contribuciones importantes en el  
112 campo de la probabilidad incluyendo, en particular, la distribución binomial. Cuando  
113 un solo ensayo de algún proceso o experimento puede conducir sólo a uno de dos  
114 resultados mutuamente excluyentes, tales como muerto o vivo, enfermo o sano,  
115 masculino o femenino, el ensayo se conoce como ensayo de Bernoulli. Dada la  
116 importancia de este tema se planteó la enseñanza mediante una calculadora de  
117 elaboración propia y se realizó utilizando Geogebra.

118  
119 Existen diversas herramientas que pueden ser utilizadas como apoyo para la  
120 enseñanza de las matemáticas, Geogebra es un software gratuito de matemáticas  
121 que ofrece la posibilidad de asociar objetos geométricos y algebraicos para resolver  
122 problemas complejos, relacionando ambas áreas de conocimiento. También permite  
123 abordar diferentes problemas matemáticos de forma creativa y original que  
124 motivarían hasta el más reacio a involucrarse en esta temática.

125  
126 El tercer método planteado a los alumnos fue el de utilizar una calculadora  
127 desarrollada en Geogebra, para obtener las probabilidades asociadas a una  
128 distribución de probabilidad binomial, en la cual solo se seleccionan los valores del  
129 tamaño de la muestra, la probabilidad de éxito y el valor de la variable aleatoria. Es  
130 importante mencionar que esta calculadora es de elaboración propia. Al realizar las  
131 instrucciones correspondientes se obtendrá de manera automática la probabilidad y  
132 la probabilidad acumulada. En la Fig. (3) se muestra el cálculo de una probabilidad  
133 con un tamaño de muestra de 18, una probabilidad de éxito de 0.22 y el valor de la  
134 variable aleatoria de uno.

135  
136



137  
138  
139  
140  
141  
142

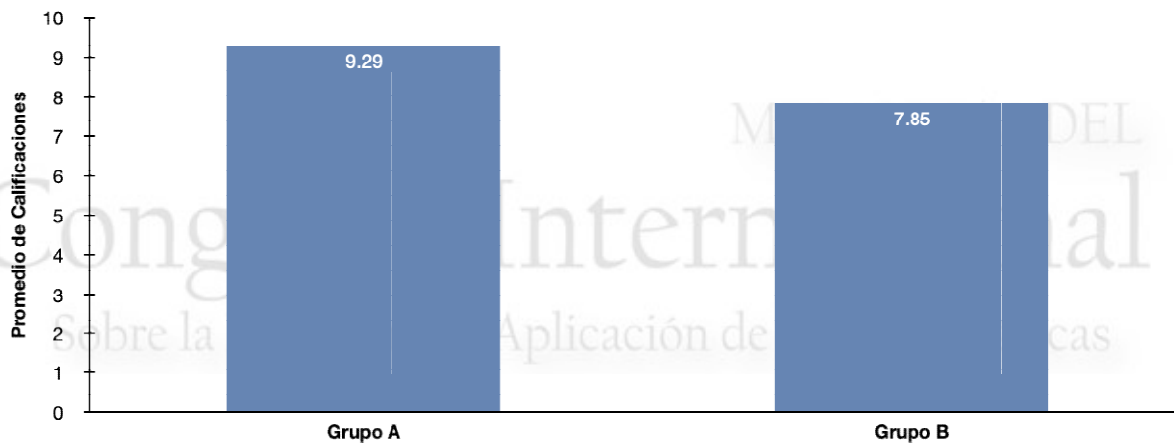
Figura 3. Cálculo de probabilidades usando una calculadora en Geogebra.

### 143 3. Resultados

144

145 Se utilizaron los tres métodos de enseñanza para el tema de distribuciones de  
146 probabilidad, en un grupo piloto (grupo A), los resultados del examen  
147 correspondiente a los temas de Distribución Binomial, Distribución de Poisson y  
148 Distribución Normal, los cuales se compararon con otro grupo que no los utilizó  
149 (grupo B). Además, los grupos que se compararon fueron grupos de un mismo  
150 profesor y en la misma licenciatura. La Fig. (4) nos muestra los resultados del  
151 examen del tema de distribuciones binomial y Poisson de ambos grupos.

152



153

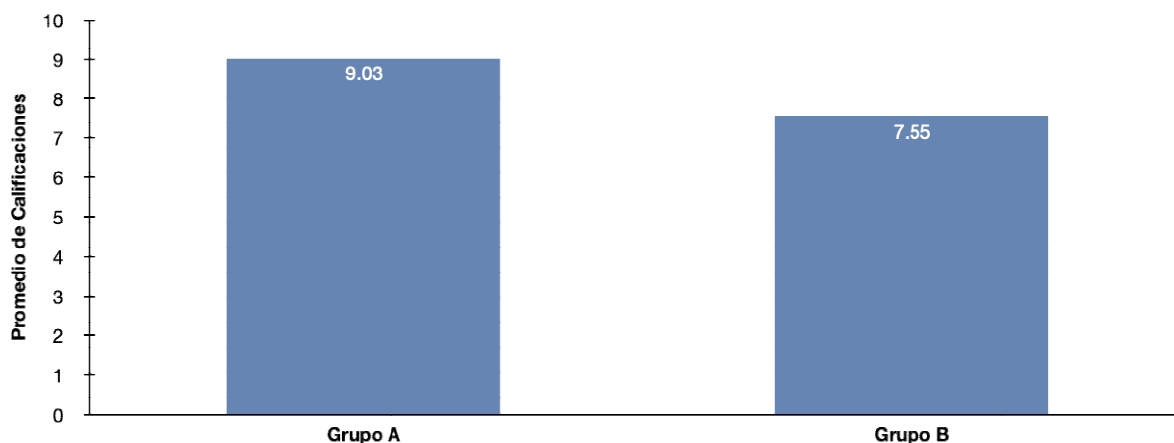
154

155 **Figura 4. Calificaciones promedio del tema de distribuciones de probabilidad**

156

157 Las calificaciones del grupo A corresponden a los alumnos que utilizaron los recursos  
158 mencionados como un complemento a lo aprendido en el aula, y que tuvieron libre  
159 acceso. La Fig. (5) nos muestra los resultados del examen correspondiente al tema  
160 de distribución normal.

161



162

163

164 **Figura 5. Calificaciones promedio del tema de distribución normal**

165

166 Es importante mencionar que en los exámenes que se realizaron a cada grupo  
167 aparte de los ejercicios a resolver también se les hicieron preguntas sobre conceptos  
168 e interpretación de los resultados obtenidos.

169

### 170 3. Conclusiones

171

172 Consideremos que las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas han  
173 destacado la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al  
174 estudiante obtener mayor profundidad de conocimiento matemático con el uso  
175 adecuado de la tecnología. Los estudiantes deben obligatoriamente desarrollar  
176 competencias digitales haciendo uso de software para resolver problemas  
177 matemáticos de manera interactiva y dinámica con la finalidad de obtener mayor  
178 aprendizaje

179

180 Hacer uso de las nuevas tecnologías despierta en el docente el interés en utilizar  
181 nuevas estrategias de enseñanza de la estadística. Ya que uno de los problemas a  
182 los que se enfrenta el profesor es al tedio y monotonía de repetir los mismos conteni-  
183 dos durante muchos semestres, el cambiar las estrategias de enseñanza ha dado  
184 como resultado la motivación de los profesores de tal forma, que han revisado los  
185 contenidos del material elaborado con un entusiasmo renovado. Esta motivación es  
186 un logro a posteriori, ya que si el profesor llega estimulado a su aula, lo transmitirá a  
187 sus estudiantes lo cual coadyuvará al mejoramiento de la enseñanza.

188

189 El uso de las nuevas tecnologías donde se resuelve de manera directa los proble-  
190 mas, formará parte del aprendizaje de los alumnos, ya que se debe destacar el análi-  
191 sis de los datos interpretando los resultados, al mismo tiempo que se resta importan-  
192 cia a los cálculos.

193

### 194 Referencias

195

- Anderson. D. R., & Sweeney, (2011) *Statistics for Business and Economics*, South-Western College Pub; 11.

196

197

- Devore, J. (2011) *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*. CENGAGE Learning, 8 edition

198

199

- Levin, R. I. & Rubin, D.S. (2010). *Estadística para Administración y Economía*. Ed. Pearson Prentice Hall, 7ª. Edición

200

201

- McClave, T. & Benson, P. (2010) *Statistics for Business and Economics*, Prentice Hall; 11 edition.

202

203

- Triola, M. (2010). México: Pearson Educación.

204

- Kenneth, C.L., Laudon, (2012) *Sistemas de Información Gerencial*, Always Learning Pearson, 12 edición.

205

206

# USO DE SOFTWARE LIBRE PARA ESTUDIAR LAS TRANSFORMACIONES LINEALES DE ROTACIÓN Y TRASLACIÓN EN ANIMACIONES

Salud Herrera Valeria<sup>1,\*</sup>, Oropeza Legorreta Carlos<sup>2</sup>  
<sup>1,2</sup> Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán.54714  
Cuautitlán Izcalli, Edo.de Méx.

EN-POSM042

## Resumen

Hace poco tiempo que las animaciones de imágenes han incursionado de manera sustancial en diversas áreas de aplicación, en consecuencia, cada vez más estudios se han realizado en torno a esta industria. Y las transformaciones lineales consideradas como mapeos de importancia fundamental en el álgebra lineal, tema reconocido como complejo o fuera de lo cotidiano por los estudiantes, juegan un papel determinante para las grandes industrias como Pixar y Walt Disney quienes interaccionan diariamente con las matemáticas en la elaboración de sus películas para el diseño de sus personajes de animación. En este escenario se usan transformaciones lineales para rotar, trasladar, ampliar o reducir el tamaño de los personajes. El objetivo del trabajo es mostrar las propiedades de las transformaciones lineales y su aplicación en la industria de la animación haciendo uso del software libre GeoGebra como herramienta didáctica en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este tópico. Diversos estudios dan cuenta que las experiencias con las TIC han evidenciado resultados positivos en cuanto a comprensión, visualización y reconstrucción de diferentes contenidos ayudados por la modelización (Vasco, 2006). Por ello se hace uso del software libre GeoGebra para la creación de animaciones. Además, actualmente se ha vivenciado que un número considerable de estudiantes desarrollan algunas habilidades inherentes relacionadas con el uso de la tecnología. Nuestro diseño considera elementos teóricos de la ingeniería didáctica cuyo foco de estudio está centrado en la actividad visual, según Douady (1996), designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero. En el reporte se proporcionan algunas evidencias obtenidas de las exploraciones que hemos realizado con diferentes grupos de estudiantes de ingeniería y comentamos varias de las regularidades observadas.

**Palabras clave:** TIC, aprendizaje significativo, transformaciones lineales.

## 1. Introducción

La globalización y los constantes cambios tecnológicos, ofrecen la oportunidad de una mejora en la pedagogía tradicional, resaltando la importancia de la adopción de la tecnología para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje en el ámbito educativo.

Actualmente los docentes deben utilizar diversos recursos o herramientas con el fin de despertar el interés de los estudiantes para que el Álgebra Lineal les resulte fácil de comprender. Las técnicas utilizadas son aspectos definitorios en el aprendizaje

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: valeria.salud@gmail.com

significativo de los estudiantes buscando integrar el conocimiento con diferentes campos de aplicación.

Las transformaciones lineales son algunas de las funciones más importantes dentro del álgebra lineal, en el caso particular de la industria de la animación se usan para rotar, trasladar, ampliar o reducir el tamaño de los personajes.

El objetivo de este trabajo, es diseñar una animación mediante el uso de transformaciones lineales con la intención de trasladar y rotar imágenes para comprender la aplicación de las mismas en la industria de la animación.

Utilizando el software GeoGebra como una herramienta que ofrecen las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para la enseñanza del Álgebra Lineal con lo cual se pretende incentivar un pensamiento lógico- creativo y el desarrollo de capacidades matemático- tecnológicas.

### Transformaciones lineales

Una transformación lineal es una función con su respectivo dominio y codominio. Con la particularidad de tener dos espacios vectoriales:  $V$  y  $W$ , y una función que va de  $V$  a  $W$ .

Es decir, una regla de asignación que transforma vectores de  $V$  en vectores de  $W$ . Para ser considerado una transformación lineal debe cumplir ciertas condiciones:

$F: V \rightarrow W$  es una transformación lineal si y sólo si:

1.  $F(u + v) = F(u) + F(v) \forall u, v \in V$
2.  $F(k \cdot v) = k \cdot F(v) \forall u \in V, \forall k \in \mathbb{R}$

(Pustilnik and Gómez, 2020)

Se dice que una transformación lineal conserva operaciones porque se obtiene el mismo resultado si las operaciones de suma y multiplicación escalar se efectúan antes o después de que se aplique la transformación lineal.

Aunque se utilizan los mismos símbolos para denotar las operaciones vectoriales tanto en  $V$  como en  $W$ , debe observarse que las operaciones pueden ser diferentes, como se indica en el siguiente Fig. (1)

(Larson and Edwards, 2004)

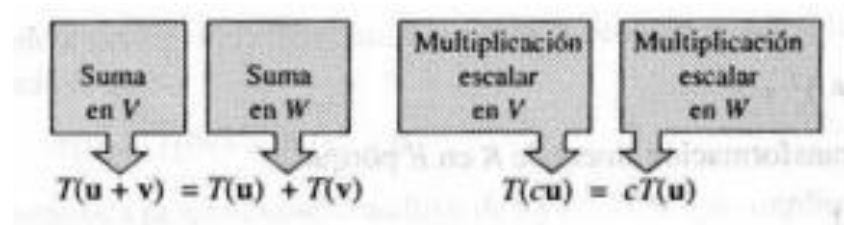


Figura 1. Operaciones con Transformaciones Lineales

## Rotación y traslación en las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^2$

### Rotación

Cada punto del plano puede unirse al origen de coordenadas mediante una recta, que forma un cierto ángulo ' $\theta$ ' con el eje x. Una rotación de centro el origen y ángulo  $\alpha$  transforma cada punto P en otro P' cuyo ángulo con el eje x es  $\alpha + \theta$ .

Al aplicar una rotación sobre un punto P de coordenadas (x,y), la posición de éste se modifica, siguiendo una trayectoria circular en el plano xy, hasta convertirse en el punto P' de coordenadas (x',y').

Para realizar una rotación se debe asignar un valor al ángulo  $\theta$  y la posición (x,y) del punto de rotación P. El ángulo puede tomar valores positivos (sentido antihorario) y negativos (sentido horario).

Usando la notación matricial, se describe el movimiento de rotación como:

$$P' = R \cdot P$$

dónde:  $P' = (x', y')$

$$P = (x, y)$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ matriz asociada de rotación}$$

### Traslación

En la traslación de un objeto sus proporciones no varían, puesto que todos los puntos significativos se mueven la misma distancia, en la misma dirección.

En 2D, el sistema de referencia homogéneo tendrá 3 dimensiones, por lo que la traslación del punto  $P = (x, y, 1)$  en forma matricial quedará indicada como

$$P' = R * P$$

dónde:  $P' = (x', y', 1)$

$$P = (x, y, 1)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matriz asociada de traslación}$$

(Pérez, Á.)

## 1. Desarrollo

### 2.1 Construcción de una animación mediante transformaciones lineales de rotación y traslación usando GeoGebra

Procedimiento

La creación de la animación está compuesta por:

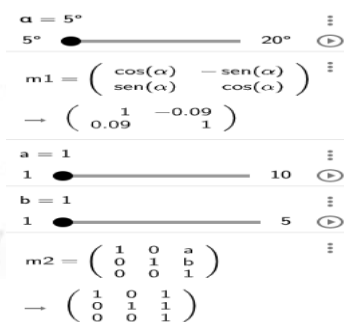
- Un fondo marino
- Un buzo
- Un tiburón
- Distintas especies de peces
- En la vista algebraica de GeoGebra, en la parte superior del menú se encuentra el icono de deslizador. Como se muestra en la Fig. (2)



**Figura 2.**  
**Menú superior**

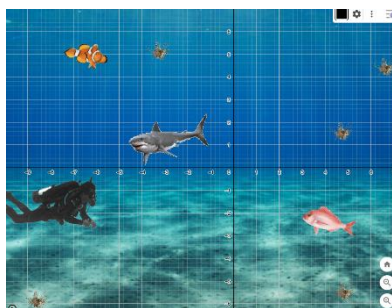


1. Crear el primer deslizador del ángulo ' $\alpha$ ' con intervalo de  $5^\circ$  a  $20^\circ$ , incremento de 1. En la parte de animación asignamos una velocidad de  $2x$  y repetición oscilante.
2. Introducir en la entrada la matriz de rotación en forma de listas utilizando corchetes.
3. Repetir los pasos anteriores con la matriz de traslación y creando dos deslizadores más:
  - 'a' es el deslizador para el desplazamiento en el eje x con un intervalo de 1 a 10, incremento de 1, velocidad  $2x$  y repetición oscilante.
  - 'b' es el deslizador para el desplazamiento en el eje y con un intervalo de 1 a 5, incremento de 1, velocidad  $2x$  y repetición oscilante. Se muestra el resultado en la Fig. (3)



**Figura 3.**  
**Deslizadores**

4. Con el mismo icono de la Fig. (2) seleccionar la función <imagen> e insertar la imagen de fondo marino, dar clic derecho y aplicar usar como fondo.
5. Insertar las imágenes faltantes de la animación con la misma función <imagen> y colocarlas en la posición deseada como se muestra en la Fig. (4).



**Figura 4.**  
**Imágenes**

6. Dar clic derecho sobre las imágenes, seleccionar renombrar, colocar el nombre deseado y posteriormente elegir en el mismo menú desplegado objetos no visibles de esta forma se aprecia sólo las transformaciones lineales de las imágenes.
7. En entrada escribir la función Apply Matrix (matrix,objeto) y aplicar la matriz de traslación ( $m_2$ ) al buzo y al tiburón. Y la matriz de rotación ( $m_1$ ) a los peces. Como se señala en Fig. (5)



**Figura 5. Nombre y matriz**

Al darle play a los deslizadores, se generan las transformaciones lineales de rotación y traslación aplicadas a las imágenes, obteniendo como resultado una animación.

Como se muestra en el siguiente link:

<https://drive.google.com/file/d/1nrb1nx29NnWRYAEz-rBIS2Efu5puG9Kw/view?usp=sharing>

### 3. Resultados y Análisis

La realización de la animación fue satisfactoria y bien implementada, cabe recalcar que es un proyecto fácil de implementar y resulta en una forma interesante y didáctica de comprender el tópico de traslación y rotación de las transformaciones lineales, así como la importancia y aplicación de este tema en la industria de la animación. Permitiendo la interpretación geométrica de la transformación a partir de su respectiva matriz asociada.

Con la implementación del software GeoGebra en la enseñanza del tema se logra que el estudiante desarrolle habilidades matemático- tecnológicas. Esto permite, luego de detectar ciertos patrones, hacer suposiciones y establecer definiciones deductivas.

### 4. Conclusiones

En nuestra opinión, el diseño y efectividad de la implementación de transformaciones lineales a través de la animación son satisfactorias, la notación matricial que describe el movimiento de rotación y traslación garantizó el aprendizaje del tema de una forma interactiva y creativa, así como, la comprensión y visualización de las aplicaciones del tópico.

Nuestra conclusión se basa en:

- GeoGebra puede considerarse como una herramienta tecnológica para la enseñanza del álgebra lineal, hace una importante contribución al uso de las nuevas tecnologías, ya que ayuda a estimular el interés por el aprendizaje de las matemáticas y cuenta con una interfaz intuitiva y ágil, siendo un software fácil de usar.
- A través de las TICs se crean distintos escenarios interactivos para los estudiantes, haciendo más divertidas, creativas y dinámicas las actividades planificadas de esta forma se logra un aprendizaje significativo.
- El uso de la animación permite entender de una forma sencilla las aplicaciones de las transformaciones lineales en otras disciplinas y permite comprender el funcionamiento matricial de la traslación y rotación.
- Nuestro trabajo demostró que el uso de las TICs estimula habilidades lógico-creativo.

### Índice de Referencias

Artigue, M. y Douady, R. (1996). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Juan Pérez, Á. y Steegmann Pascual, C., s.f. *Transformaciones geométricas: traslación, rotación y escalado*. Issuu. [En línea]. Obtenido de: [https://issuu.com/eslibre.com/docs/transformaciones\\_geom\\_tricas\\_tras](https://issuu.com/eslibre.com/docs/transformaciones_geom_tricas_tras)

Larson, R. and Edwards, B. (2004). *Introducción al Álgebra Lineal*. México: Editorial Limusa. 6th ed. Limusa, p.355.

Pustilnik, I. y Gómez, F. (2020). *Definición y propiedades de las transformaciones lineales*. Álgebra y Geometría Analítica. [En línea]. Obtenido de: <https://aga.frba.utn.edu.ar/definicion-y-propiedades-de-las-transformaciones-lineales/>

Rincon Penagos J. (2015). Traslación: Transformación Lineal de Traslación. Youtube.com. [En línea]. Obtenido de: <https://www.youtube.com/watch?v=rZXnNVD5mol>

Vasco, C. (2006). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. En C. Vasco, Didáctica de las matemáticas: artículos selectos (134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

# LOS CONJUNTOS Y LA ESTADÍSTICA, UNA APLICACIÓN EN EL AULA

Urrutia Vargas Celina Elena<sup>1</sup> <sup>1\*</sup>,  
Aguilar Márquez Armando<sup>2</sup>,  
Pineda Becerril Miguel de Nazareth<sup>3</sup>  
y Contreras Espinosa José Juan<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Carretera Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5 Vista  
Hermosa y Av. Narciso Mendoza, Col. San  
Sebastián Xhala

ID-POSM043

## Resumen

Los profesores de matemáticas se encuentran en constante actualización con la finalidad de realizar su trabajo docente en el aula, una de sus metas en la enseñanza-aprendizaje es desarrollar en el estudiante las habilidades necesarias para la resolución y aplicación de problemas. Se presenta una experiencia docente con alumnos de la asignatura de Matemáticas I, que se imparte en el primer semestre de la carrera de Química, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. UNAM. El objetivo es demostrar al estudiante que cursa la clase de matemáticas I, la utilidad del conocimiento algebraico y su aplicación. En el desarrollo se pide que el estudiante busque y elabore un resumen del tema de Conjuntos ya sea de libros o internet, existe una retroalimentación del tema por parte de los autores. Se forman equipos (con sus correspondientes roles) y se les presenta a los alumnos un problema del tema de suceso o evento que corresponde a la asignatura de Estadística (indicándoles que solo se trabajará el aspecto matemático enfocado a conjuntos y los conceptos de evento y espacio muestral relacionado con un experimento se les enseñará en Estadística, asignatura que cursará en el cuarto semestre de su carrera). Se realiza lluvia de ideas. Cada equipo muestra sus conclusiones y se analiza la solución presentada. Como conclusión en esta experiencia docente el estudiante se convence que los conceptos que se abordan en Matemáticas I son una herramienta útil y una base sólida para dar solución a problemas de aplicación, dando como resultado un alumno motivado con un aprendizaje significativo a largo plazo.

**Palabras clave:** conjunto, enseñanza, suceso, evento, motivación, aprendizaje.

## 1. Introducción

Los docentes de matemáticas consideran importante la actualización de su trabajo en el aula, debido a que el aprendizaje significativo de su asignatura exige la integración de los conocimientos de una forma distinta y así cambiar la impartición de su clase tradicional a una más dinámica, en donde se aplique la función tutorial del profesor y en donde la teoría con la práctica se entrelace para desarrollar en el estudiante las habilidades necesarias para la resolución y aplicación de problemas. Se calcula que los estudiantes sólo retienen un porcentaje pequeño de lo leen y escuchan “sin embargo cuando se simula un problema, es posible retener hasta el 90% de lo que se ha aprendido. Esta es una de las principales ideas del aprendizaje tanto mediante el

<sup>1\*</sup> Autor para la correspondencia. E-mail: celinaelena@yahoo.com.mx Tel. 5556231836

45 trabajo en proyectos como en del basado en problemas” Araújo, (2008). Se presenta  
46 una experiencia docente en un entorno educativo con alumnos de la asignatura de  
47 Matemáticas I, que se imparte en el primer semestre en la carrera de Química,  
48 Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. UNAM. De acuerdo con Schon: “Debe  
49 reconocerse que el aprendizaje del alumno no se da sólo porque el profesor le trasmite  
50 una serie de saberes teóricos o reglas predeterminadas, ni tampoco porque le  
51 proporciona instrucciones de cómo hacer las cosas. Es necesarios que se dé un  
52 diálogo entre ambos (docente-tutor y alumno-practicante)”(Schon,1992). A  
53 continuación, se presenta el desarrollo de la experiencia docente en donde se propicia  
54 el aprendizaje significativo.

55

## 56 2. Desarrollo

57

### 58 2.1 Objetivo

59

60 Demostrar al estudiante que cursa la clase de matemáticas I, la utilidad del  
61 conocimiento algebraico y su aplicación.

62

#### 63 2.1.1 La clase

64

65 El gran reto en la asignatura de Matemáticas I es motivar al estudiante debido a esto  
66 se le presenta a los estudiantes en clase un ejemplo real y práctico.

67 “Raramente nos hacemos las preguntas como las siguientes: ¿qué piensa el  
68 estudiante de lo que vamos a enseñarle?, ¿qué ideas tienen sobre la materia cuál es  
69 su actitud hacia ella?, o en general: ¿qué sabemos de sus conocimientos cuando viene  
70 por primera vez a tomar clase? Estos tipos de preguntas-que antes ni siquiera se nos  
71 ocurrían-son las que actualmente se hacen en el campo de la didáctica y son el  
72 resultado de las reflexiones y cambios de paradigmas acerca de lo que es enseñar y  
73 aprender ocurridos en los últimos veinte años”. (Quesada,2012).

74 Los autores están de acuerdo con la cita “Se conoce que un tipo de problemas se  
75 centra en componentes afectivas del aprendizaje: ¿Cómo se pueden crear actitudes  
76 positivas hacia las matemáticas? ¿Cómo se pueden crear contextos en los que se  
77 enseñe a matematizar?” (Freudenthal, 1981).

78

79 En el salón de clase se sigue los pasos que recomienda Poyla:

80 “para resolver un problema se necesita:

81 I. Comprender el problema

82 II. Concebir un plan

83 III. Ejecución del plan

84 IV. Examinar la solución obtenida” Poyla (1965).

85 Siguiendo los pasos se tiene:

86 I. Para comprender el problema:

- 87 • Se pide al estudiante que busque y elabore un resumen del tema de Conjuntos  
88 ya sea de libros o internet.

- 89
- 90
- 91
- 92
- 93
- 94
- 95
- 96
- 97
- 98
- 99
- 100
- 101
- Retroalimentación del tema por parte de los autores con los conceptos como “conjunto: colección de objetos bien definidos” Britton (1965), conjunto universal, conjunto vacío, subconjunto y operaciones con conjuntos como son la intersección, unión, diferencia, complemento y producto cartesiano, intervalos.
  - Se forman equipos, la rutina de formación de equipos se realiza aleatoriamente con tres estudiantes por equipo, se les solicita que platiquen entre ellos para buscar un nombre, un dibujo que los represente, entonces se presentan ante el grupo. Se distribuyen responsabilidades o roles de cada miembro, según Ferreiro Distribución de las responsabilidades “Distribuirse en las funciones organizativas por cumplimentar: por consenso grupal de quién es el coordinador, quién el relator y quién el verificador” Ferreiro (2013).

102 II. Se concibe un plan:

103 Se analizan los datos, se motiva la generación de preguntas y se realiza lluvia de ideas  
104 para ponerse de acuerdo como se abordará el problema, por ejemplo, se determina  
105 las incógnitas y cómo se llegará a la resolución del problema planteado mediante los  
106 conocimientos adquiridos de operaciones entre conjuntos.

107 III. Ejecución del plan

108 Al ejecutar el plan para encontrar el valor de las incógnitas del problema se llega a la  
109 solución, con la ayuda del docente como facilitador, es decir guía al estudiante y le  
110 motiva a utilizar sus conocimientos matemáticos.

111 IV. Se examina la solución: verificando los resultados en una plenaria de todos los  
112 equipos.

113

114 2.1.2 El problema

115

116 Se presenta a los estudiantes un ejercicio de aplicación de conjuntos. Se considera el  
117 problema como recurso de aprendizaje “Es principalmente a través de la resolución de  
118 una serie de problemas elegidos por el docente como el alumno construye su saber,  
119 en interacción con los otros alumnos” Parra, (2005). Indicándoles que solo se trabajará  
120 el aspecto matemático enfocado a conjuntos e intervalos y el concepto de suceso o  
121 evento y espacio muestral relacionado con un experimento se les enseñará con más  
122 profundidad en Estadística, asignatura que cursará en el cuarto semestre de su carrera  
123 cuya Unidad1 dice: Introducción a la teoría de la probabilidad, objetivo de la unidad:  
124 Describir los elementos que permitan asignar probabilidades a los eventos asociados  
125 a un experimento (Plan de Estudios, carrera Química).

126

127 Como presenta Flores (2000):

128 Sucesos o eventos

129 Un suceso o evento A (respecto a un espacio muestral S asociado con un experimento  
130 E) es simplemente un conjunto de resultados posibles, esto es un subconjunto de S.

131 En el experimento  $E_1$ : Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la  
132 cara superior, un suceso es  $A = \{2, 4, 6\}$

133 Definición: Se dice que dos sucesos A y B son “mutuamente excluyentes” si no pueden  
134 ocurrir juntos, o sea,  $A \cap B = \emptyset$

135 Ejemplo: Se prueba un artefacto electrónico y se anota el tiempo real de uso, digamos  
136 t.

137 Supongamos  $[t/t \geq 0]$

138

139 Sean A, B y C tres eventos definidos como sigue:

140

141  $A=[t / t < 100]$                        $B=[t / 50 \leq t \leq 200]$                        $C=[t / t > 150]$

142

143 Entonces

144

145  $A \cup B = [t / t \leq 200]$                       Ec. (1)

146

147  $A \cap C = \emptyset$                       Ec. (2)

148

149  $A^c=[t / t \geq 100]$                       Ec. (3)

150

151  $A \cap B = [t / 50 \leq t < 100]$                       Ec. (4)

152

153

154  $B \cap C=[t / 150 < t \leq 200]$                       Ec. (5)

155

156  $A \cup C = [t/t < 100 \text{ o } t > 150]$  Ec. (6)

157

### 158 3. Resultados

159

160 Se analizaron los datos del problema identificando el conjunto universo, los intervalos  
161 correspondientes a cada conjunto A, B y C. Al calcular la unión, intersección y  
162 complemento, los estudiantes aplican los conceptos de conjuntos que investigaron  
163 llegando a la solución correcta y se demuestra que los principios del problema  
164 planteado se pueden establecer en la forma de símbolos matemáticos.

165

### 166 4. Conclusiones

167

168 • Se logra con este tipo de problemas de aplicación el desarrollo del  
169 pensamiento crítico, analítico y reflexivo que necesita el alumno de la  
170 Licenciatura en Química.

171 • Con los casos prácticos se desarrolla la habilidad del alumno de razonar, de  
172 comprensión y de lograr la resolución de algunos problemas simples y tendrá  
173 la capacidad para resolver problemas más complicados.

174 • El alumno constata que los conocimientos adquiridos en la asignatura de  
175 Matemáticas I son de gran utilidad y por lo tanto se logra captar su atención

176 en clase al estar motivado, dando como resultado un aprendizaje significativo  
177 a largo plazo.

178

## 179 5. Índice de referencias

180

### 181 Libros

- 182 • Araújo, U. (2008). *El Aprendizaje Basado en Problemas. Una nueva perspectiva*  
183 *de la enseñanza en la universidad*. Editorial Gedisa, S.A. España. pág.75
- 184 • Britton, J. (1965). *Matemáticas Universitarias*, Editorial Continental, S.A. de C.V  
185 México, pág.34
- 186 • Ferreiro Gravié, R. (2013). *El ABC del Aprendizaje Cooperativo, Trabajo en*  
187 *Equipo Para Aprender y Enseñar*. México: Editorial Trillas, pág.100
- 188 • Flores, F. (2000) Probabilidad y Estadística, primera impresión. IPN, pág.25
- 189 • Freudenthal, H. (1981). *Major problems of mathematics*  
190 *education, Educational Studies in Mathematics* vol.12, pág.133-150
- 191 • Parra, C. et al (2005). *Didáctica de las Matemáticas, aportes y reflexiones*. 10<sup>0</sup>  
192 reimpresión. Buenos Aires: Paidós (educador), pág.58
- 193 • Poyla, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial  
194 Trillas, pág.19
- 195 • Schon, D. (1992). *La Formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo*  
196 *diseño de la enseñanza y el aprendizaje de las profesiones*. Barcelona:  
197 Paidós.
- 198 • Quesada, M. (2012). *Cómo planear la enseñanza estratégica*. Ed. Limusa.  
199 México, pág.102

### 200 Información en línea

201

- 202 • Plan de Estudios de la carrera de Química. Facultad de Estudios Superiores  
203 Cuautitlán. [En línea]. Obtenido en enero de 2022 de la dirección:  
204 [https://www.cuautitlan.unam.mx/licenciaturas/quimica/descargas/1416\\_estadistica.pdf](https://www.cuautitlan.unam.mx/licenciaturas/quimica/descargas/1416_estadistica.pdf)  
205



# DISEÑO DE BRAZO ROBOTICO UNIDO A ROBOT MOVIL APLICANDO EL PRINCIPIO DEL PENDULO INVERTIDO

Rodríguez Galeotte, Abraham<sup>\*1</sup>

*Instituto Politécnico Nacional. UPIITA. Av. IPN 2580, La Laguna Ticomán, Gustavo A. Madero, 07340, Ciudad de México, CDMX.*

**AP-POSM044**

## Resumen

*El avance de la tecnología desarrollado en los últimos años ha desembocado en la aparición de nuevas disciplinas como el internet de las cosas y la domótica, entre otras. El presente trabajo de investigación se desarrolló con el objetivo de sufragar las necesidades de desplazar objetos, no solamente con manipuladores en ambientes controlados, sino incorporar estas tecnologías a ambientes como el hogar y oficinas, entre otros. A diferencia de los manipuladores móviles existentes, en este trabajo se presenta un robot móvil de dos llantas sin deslizamiento con el fin de reducir el espacio de operación del manipulador.*

*Con esta configuración surge el problema de mantener en equilibrio al sistema para las diferentes posiciones y desplazamientos del brazo. En primera instancia se presenta la metodología que se utilizó para el desarrollo de un prototipo de manipulador móvil, lo cual incluye el diseño y manufactura de un brazo robótico de 4 grados de libertad. El móvil donde se montó el brazo ya estaba construido, aunque se retomaron restricciones y especificaciones de este. Adicionalmente se realizó una interfaz humano-máquina mediante la cual se asigna una posición previamente definida al manipulador. Para el modelado se consideró al sistema (brazo y vehículo) como una sola cadena cinemática, basándose en el modelo de un péndulo invertido, el cual mantiene en constante equilibrio al robot.*

**Palabras clave:** robot, péndulo, equilibrio, interfaz, domótica.

## 1. Introducción

Las tareas de ensamble de componentes, sujeción y manipulación de objetos están asociadas a robots manipuladores. Estas, pueden ser realizadas por manipuladores fijos en ambientes perfectamente delimitados formando parte de un proceso industrial, sin embargo, en la actualidad se busca que estos manipuladores operen en entornos diseñados para seres humanos (Reza, Guadarrama, Manuel y Rosas 2011), espacios menos específicos como el hogar, construcciones, hospitales, oficinas, etc. La Federación Internacional de Robótica (IRF por sus siglas en inglés) hace distinción entre robots industriales y robots de servicio, definiendo estos últimos como robots que realizan tareas útiles para humanos o equipos, excluidos de aplicaciones de automatización industrial. Se pueden clasificar a los robots de servicio en otros dos grupos, dependiendo del uso: personales o profesionales. Los personales tienen tareas no comerciales, ejemplos de este tipo serían robots asistentes y de servicio doméstico. Con frecuencia, los robots de servicio son móviles debido a las tareas asignadas y al espacio en el que trabajan.

<sup>1</sup> Abraham Rodríguez Galeotte. Email: [egaleotti1935@hotmail.com](mailto:egaleotti1935@hotmail.com). Tel: 5529663315.

44 Un manipulador móvil se compone de una base o plataforma móvil y un brazo robótico  
 45 acoplado a esta. Se han construido gran diversidad de manipuladores móviles e  
 46 incluso algunos ya se comercializan. Dentro de la revisión del estado del arte, se  
 47 realiza una clasificación de los tipos de manipuladores móviles de acuerdo con sus  
 48 restricciones mecánicas, y no mecánicas, para lo cual se consideraron dos  
 49 subsistemas: el robot móvil y el robot manipulador, entonces, como objetivo se  
 50 pretende diseñar y manufacturar la estructura prototipo de un manipulador de 4 Grados  
 51 de Libertad (GDL), capaz de adaptarse a una base fija y a una base móvil de dos  
 52 ruedas sin deslizamiento, así como desarrollar una interfaz humano máquina para  
 53 asignar una tarea al manipulador.

54

## 55 2. Metodología.

56

57 En el proceso de encontrar una solución a un problema, es necesario contar con una  
 58 metodología integral que permita evaluar las diferentes ideas o propuestas respecto a  
 59 las necesidades o especificaciones planteadas. Un método estructurado de selección  
 60 permite obtener un diseño competitivo y mantiene la objetividad en todo momento. Las  
 61 matrices de selección son una herramienta para asignar prioridades, evaluar y  
 62 disminuir un conjunto de opciones potenciales ya sea para tareas o soluciones. El  
 63 modelo físico de un péndulo invertido montado sobre un carro móvil se muestra en la  
 64 figura 1.

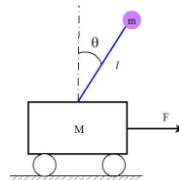


Fig. (1) Péndulo invertido

65

66

67

68 Los requerimientos y especificaciones fueron planteados a partir de los objetivos  
 69 propuestos. Al hacer el análisis de los objetivos, se obtuvieron nueve requerimientos,  
 70 los cuales se enumeran en la tabla 1. De los nueve requerimientos, cinco de estos  
 71 hacen referencia a todo el sistema, mientras que solo cuatro involucran al manipulador  
 72 móvil.

73

74

Tab. (1) Requerimientos de diseño

1	Coordinación entre la base y el brazo mientras cambia de posición
2	Peso menor de 5 kg
3	4 grados de libertad
4	Interfaz amigable
5	Materiales anticorrosión

75

76

77

78 **2.1 Diseño del manipulador.**

79

80 Para la realización del diseño mecánico del manipulador móvil se contemplaron  
81 diversos puntos que se explican a lo largo del desarrollo de esta sección.

82

83 **2.1.1 Eslabones.**

84

85 Ya que la configuración del manipulador es antropomórfica, el eslabón 1 realiza la  
86 función de cintura. Para el diseño de este eslabón se tomaron en cuenta las  
87 dimensiones de los motores seleccionados y el área de la base móvil donde se planea  
88 montar el manipulador(20x20cm). El diseño de la cintura cuenta con cinco piezas:  
89 soporte del eslabón 1, anillo de sujeción inferior, rodamiento, soporte de eslabones y  
90 anillo de sujeción superior.

91

92 Soporte del eslabón 1:

93

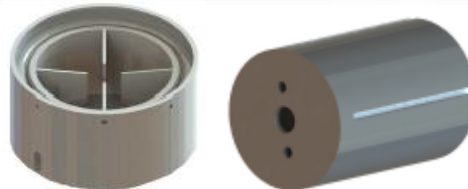
94

95

96

97

- Soporte del motor: garantiza un correcto centrado del motor.
- Soporte del rodamiento: permite el libre giro del soporte de eslabones.
- El manipulador debe operar tanto en la base móvil como en una base fija, por lo que debe ser desmontable.



**Fig. (2): Soporte del eslabón 1.**

98

99

100 Rodamiento:

101

102

103

104

105

- Girar libremente.
- El peso total del rodamiento debe ser bajo.
- Desmontable y de fácil mantenimiento.
- Que permita una distribución uniforme del peso total del manipulador.

106

107

108

109

Al considerarse los puntos mencionados anteriormente se decidió utilizar “balines” de 3/8 de pulgada. Con base en el “balín”, se propuso el diseño de un tipo de arandela con cuatro ranuras, dejando a los balines sin posibilidad de salirse. Como se muestra en la Figura 3.



**Fig. (3): Diseño del rodamiento.**

110

111

112 El rodamiento se coloca encima del soporte de cintura, específicamente sobre el riel  
 113 de guía.

114

115 Soporte de eslabones:

116 El diámetro se propuso con base en el diámetro del soporte del eslabón 1, la pieza  
 117 cuenta con dos ranuras en las que entra el eje 1, lo que permite que el manipulador  
 118 sea desmontable, este soporte carece de sujeciones por lo que solo se montará sobre  
 119 el rodamiento. Figuras 4a y 4b



120

121

122

**Figs. (4a)–(4b): Soporte de eslabones.**

123

124 Anillos de sujeción:

125 El anillo de sujeción inferior (Ver Fig. 5a) esta atornillado en cada una de las bases: la  
 126 fija y la móvil. Este anillo se encarga de dar sujeción al soporte de la cintura con la  
 127 ayuda de ocho opresores Allen de 5x6 mm simétricamente distribuidos alrededor de  
 128 este. Por otro lado, el anillo de sujeción superior (Ver Fig. 5b) ayudará a sujetar al  
 129 elemento soporte de eslabones, este anillo garantiza que el manipulador no se moverá  
 130 de un lado a otro al momento de girar el actuador.

131



132

133

134

135

**Figs. (5a) - (5b): Anillo de sujeción.**

136 Eslabones 2,3 y 4:

137 En la tabla 2, se muestran las medidas correspondientes a la distancia entre juntas o  
 138 ejes, con base en dichas medidas se propusieron anchos para cada eslabón y las  
 139 longitudes totales.

140

**Tab. (2) Requerimientos de diseño**

Eslabon	Distancia entre ejes	Logitud [mm]	Ancho [mm]	Área [mm <sup>2</sup> ]	Distancia entre elementos [mm]	Volúmen [mm <sup>3</sup> ]	Masa [g]
Eslabón 2	71.43	130.73	60	15177.01	113.2	20915.04	25.1
Eslabón 3	93.2	142.5	50	14304.25	104	19286.7	23.14
Eslabón 4	60	100	40	8155.97	96	10589.28	12.71

141

142

143 Para seleccionar el material recordamos lo descrito en la tabla 1, por lo que se eligió

144 acrílico. Se tomaron en cuenta espesores de tres y cinco milímetros. Para evitar que

145 el elemento sufriera pandeo, se le consideró como una columna y se calculó la fuerza  
146 crítica que resiste. Para una columna intermedia con extremos articulados y  
147 considerando un espesor de 3 mm, Euler establece lo siguiente:  
148

$$F_{critica} = \frac{\pi^2 EI}{l_2}$$

Ec. (1)

149 Donde:  $E= 2802.8$  MPa (Módulo de Young del acrílico)  
150  $I=$  momento de inercia del área transversal, se consideró un rectángulo  
151  $l_2=142.5$  mm (longitud de la columna).  
152

153  
154 Para calcular el momento de inercia con respecto al eje y de un rectángulo, se tiene:  
155

$$I = \frac{b^3 h}{3} = \frac{3^3 * 50}{3} = 450 mm^4 = 4.5 \times 10^{-10} m$$

Ec. (2)

156 De la Ec. (1) se obtiene una fuerza crítica de 87.35 Newtons.  
157  
158 Para obtener la masa que soportará este elemento, de espesor igual a 3 mm, sin  
159 pandearse, solo dividimos entre la gravedad:  
160  
161

$$m = \frac{F_{critica}}{g} = \frac{87.35}{9.81} = 8.90 kg$$

Ec. (3)

162 Debido a que la masa que soporta es mucho mayor, se observa que al utilizar acrílico  
163 de 3 mm de espesor, no habrá pandeo por lo tanto es viable para este diseño.  
164  
165  
166

#### 167 2.1.2. Transmisión de movimiento:

168  
169 Para la transmisión del movimiento, se utilizaron poleas y bandas. Para transmitir el  
170 par torsor del motor correspondiente a cada eslabón se usó una transmisión por  
171 partes, es decir, que para el motor 2 y el eslabón 2 se utilizaron dos bandas. La primera  
172 va del motor 2 al eje 1 con una polea en libre rotación y luego, del eje 1 al eje 2 a una  
173 polea fija que da el movimiento al eslabón 2. Lo mismo ocurre con el eslabón 3, pero  
174 en este caso se usaron tres bandas. Para las poleas móviles se usaron bujes de  
175 bronce, en la tabla 3, se muestra un esquema general de la transmisión.  
176 Entre los diversos tipos de bandas, se seleccionaron bandas sincronas ya que no  
177 requieren de dispositivos tensores y su peso es muy ligero. Además, como la  
178 transmisión se realiza por medio de dientes, pueden ser sincronizados los  
179 movimientos de diferentes ejes.  
180  
181  
182

**Tab. (3) Esquema general de transmisión.**

Eslabón	Conductor	Conducido	Tipo de polea	Distancia entre centros
Eslabón 2	Motor 1	Eje 1	Fija/Fija	51.20 mm
Eslabón 3	Motor 2	Eje 1	Fija/Móvil	81.76 mm
	Eje 1	Eje 2	Móvil/Fija	71.43 mm
Eslabón 4	Motor 3	Eje 1	Fija/Móvil	81.76 mm
	Eje 1	Eje 2	Móvil/Móvil	71.43 mm
	Eje 2	Eje 3	Móvil/ Fija	60 mm

183

184

185 Cálculo de la potencia con la ecuación general del torque:

$$P = \frac{\tau n}{63,025} = 0.003Hp$$

Ec. (4)

186

187

188 Para la selección de bandas y poleas adecuadas se siguió la metodología  
 189 recomendada por el manual [*Gates. Light power & precision drive design manual*]. el  
 190 cual es para carga ligera. En el manual [*Gates. Light power & precision drive design*  
 191 *manual*] se usa el par torsor para la selección del paso de la banda, este debe de estar  
 192 en lb-in.

193

194

$$Q = \tau * FS = 35.16lb - in$$

Ec. (5)

195

196 Donde: Q es la carga o par de diseño,  $\tau = 23.44lb-in$  es el par torsor y  $FS = 1.5$  es el  
 197 factor de seguridad por recomendación del manual [*Gates. Light power & precision*  
 198 *drive design manual*]. Con la carga de diseño y la velocidad,  $n = 18rpm$ , se determinó  
 199 el paso de la banda, el cual es igual a 2mm. Al no requerir reducción, la relación de  
 200 velocidad es  $RV = 1.$ , Realizando un análisis de costo/entrega, se encontró que las  
 201 impresoras 3D usan poleas dentadas con el tipo de diente y paso que se  
 202 seleccionaron, estas tienen las características siguientes: 20 dientes, ancho de 8  
 203 milímetros, diámetro primitivo de 0.501 pulgadas y un buje de 8mm.

204

205

Tab. (4) Esquema general de transmisión.

Eslabón	Conductor	Conducido	Distancia entre centros [mm]	Longitud de Banda [mm]
Eslabón 2	Motor 1	Eje 1	51.2	140
Eslabón 3	Motor 2	Eje 1	81.76	180
	Eje 1	Eje 2	71.43	180
Eslabón 4	Motor 3	Eje 1	81.76	180
	Eje 1	Eje 2	71.43	180
	Eje 2	Eje 3	60	224

206

207

208 2.1.3 Ejes de transmisión:

209

210 Para la fabricación de ejes de transmisión o árboles generalmente se usan aceros  
 211 rolados en frío de bajo o medio carbono y bajo costo. Se propuso usar acero-plata  
 212 W11P debido a que comercialmente se encuentran barras de diversos diámetros  
 213 rectificadas. Para su estudio se consideró al eje como una viga con dos apoyos  
 214 colocados muy cerca de los extremos lo que implica dos voladizos. Figura 6.  
 215

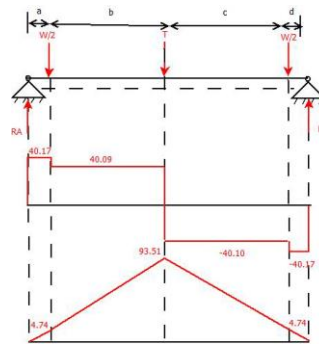
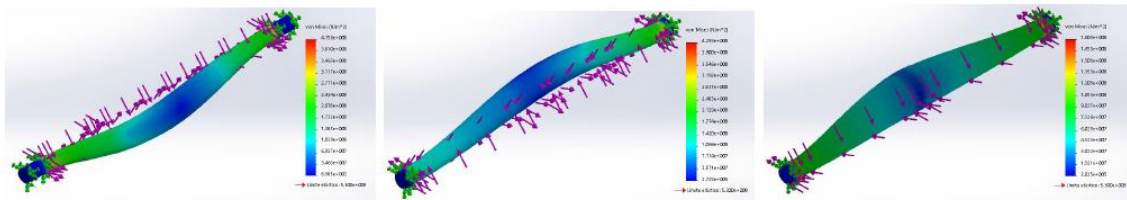


Fig. (6): Diagrama de fuerzas cortantes y momento flector del eje.

216 Para validar los resultados se usó el software Solidworks® para hacer análisis  
 217 estáticos de los elementos. Figura 7.  
 218



(a) Eje1

(b) Eje2

(c) Eje3

Fig. (7): Simulación de esfuerzos.

### 3. Resultados y análisis

Diseño final del manipulador fijo y móvil:

Para armar el manipulador se deben seguir los pasos mostrados en la figura 8.



Fig. (8): Proceso de ensamblaje del manipulador.

Este puede ser montado sobre la base móvil o sobre la base fija, como se muestra a continuación. Figura 9:



Fig. (9): Brazo ensamblado en las dos bases.

232

233

234

235

#### 4. Conclusiones

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

#### 5. Índice de referencias

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263

- Craig, John J. (2006). *Introducción a la Robótica*. México, Prentice Hall.
- Faires, V.M. (2011). *Diseño de elementos de máquinas*, España, Montaner y Simón.
- *Light power & precision drive design manual*. (2015).  
[www.gates.com/drivedesign](http://www.gates.com/drivedesign). <https://www.gates.com/content/dam/gates/home/knowledge-center/resource-library/catalogs/light-power-and-precision-manual.pdf>
- A. Manuel; Reza R; Guadarrama A; Rosa, L. (2011). *Robot móvil péndulo invertido en equilibrio para competencia internacional de velocidad*. Tesis Licenciatura, México, UPIITA.
- L. Felipe; Balaguer C.; Aracil S; Cruz R., Barrientos A; Peñon. (2007). *Fundamentos de Robótica*. México. Mc Graw Hill.



# DIAGONALIZACIÓN DE LAS MATRICES DE MASAS DE NEUTRINOS

Ricardo Gaitán Lozano<sup>1\*</sup>, José Manuel Rivera Rebolledo<sup>2</sup> y Albino Hernández Galeana<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Carretera Cuautitán Teoloyucan Km 2.5. Cuautitlán Izcalli Estado de México. C.P. 54714.

<sup>2,3</sup> Departamento de Física, ESFM-Instituto Politécnico Nacional. U.P. “Adolfo. López Mateos”. Ciudad de México, C. P. 07738.

AP- POSM045

## Resumen

La idea de neutrino fue propuesta por Wolfgang Pauli en 1930. Los neutrinos son partículas fundamentales que tienen carga eléctrica igual a cero y espín  $1/2$ ; de los datos de las oscilaciones de neutrinos y los datos de los experimentos sobre el decaimiento beta sobre la medida directa de la masa de los neutrinos es posible concluir que son más pequeñas que 1.1 electronvolts. En este trabajo se aplica el mecanismo de “balancín”, que es el más viable para la generación de masas pequeñas de neutrinos, y el método de diagonalización de la matriz de masas resultante. En el contexto de un modelo con simetría izquierda-derecha que contiene fermiones especulares con grupo de norma  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$ , se realizó una estimación de las masas de los neutrinos, encontrando que son consistentes con sus cotas experimentales y la jerarquía.

**Palabras clave:** Neutrinos, oscilaciones de neutrinos, masas de neutrinos, matrices, diagonalización, Mecanismo balancín.

## 1. Introducción

El neutrino, descubierto por Clyde Cowman y Frederick Reines en 1956 [1], es una partícula subatómica sin carga eléctrica y espín  $1/2$ . La existencia del neutrino fue propuesta en 1930 por el físico Wolfgang Pauli para satisfacer la conservación de energía y momento lineal en la desintegración beta del neutrón. Los experimentos realizados en el Observatorio de Neutrinos de Sudbury (SNO, por sus siglas en inglés) en Canadá, y en el Super-Kamiokande en Japón, entre otros, evidenciaron que los neutrinos cambian de un sabor a otro de manera que estas partículas tienen una masa no cero y se mezclan [2]. El descubrimiento de las oscilaciones de neutrinos significa también que los campos de sabor de los neutrinos con  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  son combinaciones unitarias (mezclas) de los campos de neutrinos con masas definidas [3]. El mecanismo de balancín es un modelo que se utiliza para entender los tamaños relativos de las masas de neutrinos, del orden de electronvolts, comparadas con las de los quarks y leptones cargados, los cuales son millones de veces más pesados [4].

<sup>1</sup>\* Autor para la correspondencia. E-mail: rgaitan@unam.mx

45

46

## 47 2. Metodología o desarrollo

48

### 49 2.1 Modelo Especular con simetría izquierda-derecha

50

51 El Modelo Especular con simetría izquierda derecha está basado en el grupo de norma  
52  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$  que contiene en el sector de fermiones neutros,  
53 además de los 3 neutrinos estándar  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ , otros 3 neutrinos pesados  $\hat{\nu}_1, \hat{\nu}_2, \hat{\nu}_3$  que  
54 tienen propiedades especulares [5]. Mientras que los neutrinos estándar tienen inter-  
55 acciones izquierdas, los neutrinos especulares tienen interacciones derechas.

56

### 57 2.2 Matriz de masa del neutrino

58

#### 59 2.2.1 Diagonalización de la matriz de masa

60

61 La matriz de masa de los neutrinos es una matriz  $6 \times 6$  simétrica que tiene la forma

$$62 \mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} \quad (1)$$

63 donde  $M_L$  y  $M_R$  son matrices complejas  $3 \times 3$  no diagonales, y  $M_D$  es una matriz compleja  
64  $3 \times 3$  no diagonal.

65

66 La matriz  $\mathcal{M}$  puede ser diagonalizada por una matriz  $6 \times 6$  unitaria  $U$ ; es decir,

$$67 m = U^T \mathcal{M} U \quad (2)$$

68 con  $m = (m_{ik}) = m_i \delta_{ik}, m_i > 0 (i, k = 1, 2, \dots, 6)$ .

69

70 Suponiendo que

$$71 U = \begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} \quad (3)$$

72 se obtiene

$$73 U^T U = \begin{pmatrix} A^T & D^T \\ B^T & E^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A + D^T D & A^T B + D^T E \\ B^T A + E^T D & E^T E + B^T B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (4)$$

74 y

$$75 U^T \mathcal{M} U = \begin{pmatrix} A^T & D^T \\ B^T & E^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_l & 0 \\ 0 & M_h \end{pmatrix} = m \quad (5)$$

76

77 Si  $M_l$  y  $M_h$  son diagonales el procedimiento de diagonalización es exacto.  $M_l$  y  $M_h$  re-  
78 presentan las masas de los neutrinos ligeros y pesados, respectivamente.

79

80 En el límite de balancín,  $|M_{L,ij}| \ll |M_{D,ij}| \ll |M_{R,ij}|$ , tal que en esta aproximación  $A \approx$   
81  $I, E \approx I, |B_{ij}| \approx |D_{ij}| \ll 1$ .

82

83 De la Ec. (4) y la Ec.(5) se obtiene la relación

$$84 B = M_D M_R^{-1} = -D^T \quad (6)$$

85 Finalmente, usando la Ec.(6) en la Ec.(5), se llega a

$$86 \quad M_\nu = M_L - M_D M_R^{-1} M_D^T \quad (7)$$

87 que es la aproximación de balancín para neutrinos ligeros.

88

89 Después de aplicar otra vez la aproximación de balancín, se obtiene la matriz de or-  
90 den  $3 \times 3$ :

91

$$92 \quad M_{ligero} = -\sigma \hat{M}^{-1} \sigma^T \quad (8)$$

93

94 Los valores propios de matriz dada por la Ec. (8) proporciona las masas de los neu-  
95 trinos ligeros.

96

97 La estructura de la Ec. (8) con  $\hat{M}$  grande asegura que las masas de los neutrinos son  
98 pequeñas con respecto a las masas de los leptones cargados y quarks.

99

100

### 101 **3. Resultados y análisis**

102

103 La diagonalización de la matriz dada por la Ec. (8) conduce a la matriz

104

$$105 \quad M_{diagonal} = U_\nu^T M_{ligero} U_\nu = \text{Diag}(m_1, m_2, m_3) = A \frac{v^2}{\hat{m}^2} (1, \Delta_1, \Delta_2) \quad (9)$$

106

107

108 La supresión por la escala  $\hat{m}$  proporciona una explicación natural para la pequeñez de  
109 las masas de los neutrinos estándar.

110

111 Tomando la escala electrodébil del orden  $v \approx 246 \text{ GeV}$  y  $\hat{M} \approx 4v \approx 1 \text{ TeV}$ , se obtienen  
112 los siguientes resultados para las masas de los neutrinos ligeros:

113

$$114 \quad ((m_1, m_2, m_3) = (0.0865, 0.0870, 0.1) \text{ eV}$$

115

116 Estas masas de los neutrinos son consistentes con las cotas  $m_\nu < 1.1 \text{ eV}$  [6].

117

118

### 119 **4. Conclusiones**

120

121 El mecanismo de balancín es el mecanismo más viable para la generación de masas  
122 pequeñas de los neutrinos. Las masas de los neutrinos son suprimidas con respecto  
123 a las masas estándar de quarks y leptones por un factor  $\frac{v}{\Lambda}$  ( $v \cong 246 \text{ GeV}$  es la escala  
124 de la física del Modelo Estándar y  $\Lambda$  es la escala de una nueva física). El valor del  
125 parámetro  $\Lambda$  es un problema abierto, con la posibilidad  $\Lambda \gg v$ .

126 En este trabajo el Modelo Especular con simetría izquierda derecha es aplicado con la  
127 finalidad de encontrar valores de las masas de los neutrinos cercanos a los datos fija-  
128 dos por los experimentos. Utilizando un mecanismo de balancín dos veces, efectuando  
129 la diagonalización de la matriz de masa, y con ayuda de los datos de neutrinos las  
130 masas son acomodadas con jerarquía normal del orden de  
131  $(m_1, m_2, m_3) = (0.0865, 0.0870, 0.1) eV$ . De esta manera, se ha encontrado una jerar-  
132 quía pequeña consistente con las masas de los neutrinos estándar.

133

134

### 135 **Agradecimientos**

136

137 El primer autor agradece el apoyo al proyecto PAPIIT IN115319 y al Sistema Nacional  
138 de Investigadores (SNI).

139

140

### 141 **5. Referencias**

142 [1] Reines, F. & Cowan C. (1956). The neutrino. *Nature* 178, 446-449

143 [2] Bilenky, S. (2016). *Neutrino Oscillations: From a historical perspective to the present*  
144 *status. Nuclear Physics B* 908, 2-13.

145 [3] Bahcall, J. N. (1989). *Neutrino Astrophysics*. New York, USA: Cambridge Univer-  
146 sity Press.

147 [4] Mohapatra, R. N. & Pal, P. B. (2004). *Massive Neutrino in Physics and Astrophys-*  
148 *ics*. Singapur: World Scientific Publishing Company.

149 [5] Gaitán, R., Hernández, A., Montes. de Oca, J. H., Rivera, J. M. & González, H.  
150 (2015). *Nuclear and Particle Physics Proceedings* 267, 101-107.

151 [6] Zyla, P. A. (2020). *Progress in Theoretical and Experimental Physics* 083C01, 1-  
152 11.

153

# DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE MÁQUINA REVELADORA DE PELÍCULAS PERIAPICALES

Rodríguez Galeotte Abraham <sup>1\*</sup>

*Instituto Politécnico Nacional. UPIITA. Av. IPN 2580, La Laguna Ticomán, Gustavo A.  
Madero, 07340, Ciudad de México, CDMX.*

**AP-POSM046**

## Resumen

*El presente trabajo de investigación, consiste en mostrar el desarrollo de un prototipo de máquina Reveladora Automática de Películas Periapicales, comenzando con la investigación de ventajas y desventajas que tienen las maquinas reveladoras en la actualidad tanto manuales como automáticas, y así tomar las ventajas de ambas, continuando con el diseño, se tomaron mediciones para la realización de pruebas y cálculos matemáticos hasta llegar a la construcción de esta. Haciendo una comparación con respecto al peso, tamaño, capacidad y sobre todo precio, se investigaron antecedentes de máquinas tanto manuales como automáticas que hacen la misma función.*

*El problema a resolver, fue poder hacer una máquina cuyo diseño y manufactura resultara más eficiente, económica y técnicamente, que una máquina automática comercial teniendo las mismas ventajas comparada con la manual, que el tamaño y capacidad de revelado sea la adecuada para un consultorio dental, con mantenimiento eventual y con el mínimo de errores posibles en el revelado.*

*Primeramente, se diseñó y manufacturó un mecanismo diferente al comúnmente utilizado por las reveladoras actuales (automáticas), utilizando una menor área, obteniendo un mejor aprovechamiento del espacio vertical. Se propuso un mecanismo giratorio y uno de elevación, los cuales fueron la base de esta máquina, haciendo cálculos matemáticos sobre las dimensiones (mecanismo de elevación) y capacidad de carga (mecanismo giratorio). Se realizaron pruebas de los mecanismos trabajando en conjunto y se procedió a diseñar y programar el control de tiempos y posiciones de la base que sujeta las películas, esto mediante sensores de posición en conjunto con la programación del dispositivo que controla la máquina.*

**Palabras clave:** Reveladora, películas, periapical, prototipo, máquina.

## 1. Introducción

Una máquina reveladora de películas periapicales es una herramienta necesaria para el diagnóstico correcto de una pieza dental, es uno de los procedimientos más realizados en laboratorios y consultorios dentales. En la actualidad existen diferentes máquinas para el revelado automático, sin embargo, presentan inconvenientes como la adquisición de la máquina, el costo y mantenimiento de esta, en el país, así como errores durante el procesado de las películas, errores relacionados con la manipulación inadecuada de la misma. Debido a la forma de los mecanismos usados para el transporte de la película, se presenta dificultad para la limpieza de las partes en contacto con los químicos (revelador, fijador), así como la contaminación entre los recipientes contenedores de los químicos como consecuencia de la transición de la película entre las etapas del revelado. La finalidad de este trabajo es el diseño y construcción de un prototipo basado en las reveladoras manuales, tomando en cuenta

<sup>1\*</sup> Abraham Rodríguez Galeotte E-mail: [egaleotti1935@hotmail.com](mailto:egaleotti1935@hotmail.com). Tel. 55-29-66-33-15.

44 los mecanismos usados, tiempo de revelado, y elementos de interacción con el  
45 usuario. El prototipo pretende una mejora con respecto al proceso manual, sin perder  
46 las funcionalidades que presenta el proceso automático, además de anexar el diseño  
47 para fácil reabastecimiento de químicos y mantenimiento de las partes que lo  
48 componen.

49 Las etapas que componen al proceso son revelado, baño, fijado, lavado y secado. La  
50 mayoría de los consultorios dentales que realizan el proceso de revelado utilizan  
51 máquinas manuales, ya que son económicas y se pueden conseguir fácilmente, pero  
52 su manejo es delicado y tedioso cuando se tienen que revelar más de 10 películas por  
53 día. En la actualidad existen diferentes máquinas para el revelado automático, sin  
54 embargo, se siguen utilizando las reveladoras manuales, por los aspectos antes  
55 mencionados.

56

## 57 2. Metodología o desarrollo

58

59 Para el diseño conceptual del prototipo, se pretende utilizar la metodología del análisis  
60 funcional del proceso, por lo cual debemos señalar cada una de las partes de este,  
61 como se describe a continuación:

62 Revelado: La principal acción del revelado es transformar los iones de plata de los  
63 cristales expuestos en plata metálica. Para que la plata iónica se transforme en  
64 metálica un electrón debe ser proporcionado al ion de plata. El fin del revelado es  
65 producir una imagen visible a partir de la imagen latente.

66 Baño de paro: Su objetivo es detener y eliminar el exceso de productos químicos de la  
67 emulsión.

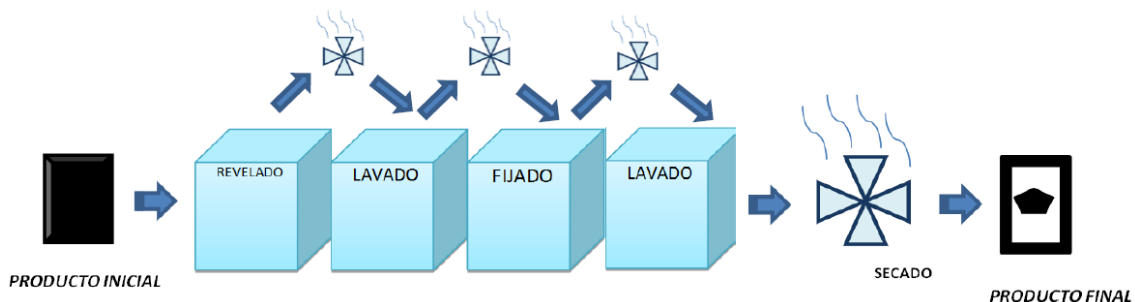
68 Fijado: La imagen se fija en la película y ello produce películas de calidad de archivo.

69 Su objetivo es eliminar el haluro de plata remanente de la emulsión y endurecer la  
70 gelatina.

71 Lavado: Elimina el exceso de productos químicos y el agente limpiador es el agua.

72 Secado: Su objetivo es eliminar el agua y preparar la radiografía para su visionado. El  
73 secado de la radiografía se dispara con aire seco caliente sobre las 2 superficies de la  
74 película a medida que se transporta por la cámara de secado.

75



76

77

Figura 1. Proceso de revelado de películas.

78

79

80 Como sistema Mecatrónico, el prototipo comprende una etapa de medición de  
 81 variables: tiempo, temperatura y posición, usando sensores, de temperatura, ópticos y  
 82 de contacto. Dichas variables serán interpretadas por un microcontrolador (*Palacios,*  
 83 *E. 2004*) el cual mediante la lógica adecuada coordinará a los actuadores del prototipo  
 84 (motores de corriente directa y resistencias de cartucho) que su vez modificarán a las  
 85 variables que medirán continuamente los sensores, teniendo una configuración de  
 86 control de lazo cerrado, o realimentado. Tabla. (1).

87  
 88

**Tabla 1. Propuestas de solución basado en al análisis funcional.**

Etapa	Actualmente	Posible solución
Colocación de la placa	Este proceso se hace manualmente, se inserta la película en una pinza con terminación en punta y se sumerge directamente a la solución, o en el mejor de los casos en una base de la máquina automática.	Diseñar una base en la cual se pueden colocar de 1 a 5 películas, de tal forma que las películas queden paradas y con una ligera curvatura.
Revelado, Lavado y Fijado	Se sumerge la placa y se espera dependiendo el método el tiempo necesario según la tabla 1 y descripción de las máquinas reveladoras. En cuanto a la manipulación de la película para su traslado: de forma manual se pasa entre los diferentes contenedores por medio de la pinza con la mano. De forma automática la mayoría de las máquinas usa rodillos para el desplazamiento de la película en las diferentes etapas del proceso, haciendo que la limpieza de los rodillos sea complicada.	Analizar los tiempos de los métodos usados actualmente para determinar el tiempo mínimo necesario para el revelado de una película. Diseñar y construir un tornillo sin fin que sobre el mismo se deslice el sujetador, sumerja las películas en los líquidos.
Secado	De igual manera se hace a través de rodillos exponiendo la placa a aire caliente de manera automática, de forma manual sólo se expone a un ventilador o secadora.	Se estudiará y analizará la solución de diseño y construcción de un sistema de ventilación adaptable al prototipo.
Interfaz	Botones de encendido y apagado, indicadores visibles, audibles (Focos, LEDs, zumbadores).	Diseño y construcción de una interfaz que mantenga al usuario informado del proceso de manera visual (pantalla LCD) y audible (zumbador), así como indicador de reemplazo de reactivos cuando sea necesario.

89  
 90

91 Los mecanismos esenciales y que diferencian a esta reveladora de las existentes son:  
 92 el mecanismo de elevación y el mecanismo giratorio los cuales son parte medular de  
 93 la máquina ya que sin éstos el proceso no se podría llevar a cabo.

94  
 95

## 2.1 Diseño mecánico.

96  
 97

Estructura: bastidor, cubierta, compuertas/ranuras, base.

98  
 99

Mecanismo giratorio: motor, flecha, poleas, charola porta contenedores, banda, contenedor, control mecanismo base giratoria

100  
 101

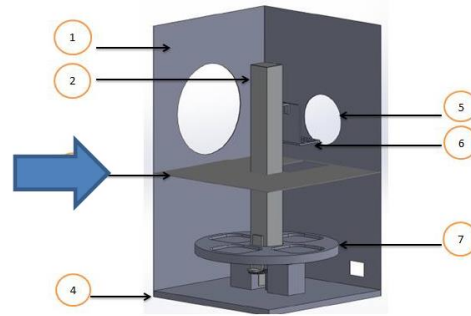
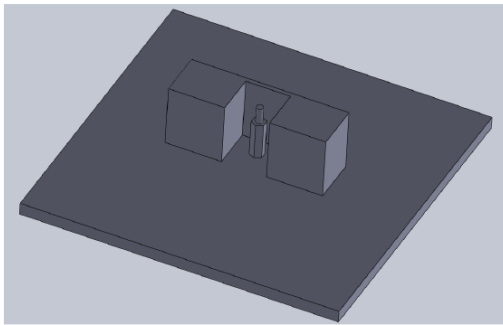
Mecanismo de elevación: motorreductor, columna guía, tornillo sin fin, sujetador, base sujetadora, gancho sujetador.

102  
 103

Como bastidor se utilizó una placa cuadrada de Aluminio de 25 x 25 cm. Figura (2a).

104  
 105

106  
 107

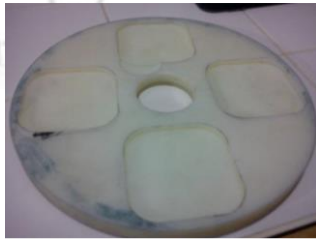


(a) (b)  
**Figuras 2a - 2b. Base, bastidor, compuertas y ranuras.**

108  
 109  
 110  
 111  
 112  
 113  
 114  
 115  
 116  
 117

Charola porta contenedores:

Consiste en un disco de Nylamid con cuatro cajas (figura 3a y3b), con una perforación en el centro para que atraviese la columna guía, El tipo de rodamiento propuesto en base a las medidas de la base giratoria es un SKF con designación 32009 XA del tipo cónico.

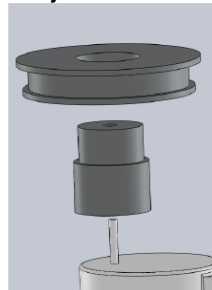


**Figuras 3a - 3b. Charola portacontenedores.**

118  
 119  
 120  
 121  
 122  
 123  
 124  
 125  
 126

Flecha motor-acople-polea:

Se hizo un acople para la flecha del motor, para que la banda tenga posición horizontal y una mejor transmisión, la cual consiste en un cilindro de aluminio con una perforación en uno de sus extremos, para que la flecha se inserte y se asegure con un “prisionero”, en el otro extremo del cilindro, se redujo el diámetro menor para insertar la polea.



**Figura 4. Cople y polea.**

127  
 128  
 129  
 130  
 131

Para seleccionar el motor, se determina el par necesario, para mover la base giratoria retomando las ecuaciones mencionadas al inicio de este apartado (Rodríguez J. 2007).



132 Tomando para el cálculo los datos de una banda Goodyear® 19”, la tensión permisible  
 133 para la banda es  $T_1 = 35.582 \text{ N}$ . Entonces  $T_2$  es:

$$T_2 = \frac{35.582}{\frac{0.3 \cdot \frac{7\pi}{9}}{e^{\sin(40)}}} = 15.94 \text{ N}$$

134  
 135

**Ecuación 1.**

136 Determinando el par sobre la polea conducida y la polea conductora, tenemos

137

$$M = 27 \text{ mm}(19.64 \text{ N}) = 0.53 \text{ N} \cdot \text{m}$$

138

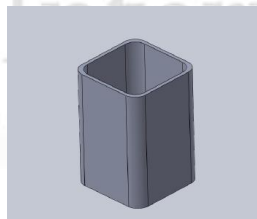
$$M = 42.5 \text{ mm}(19.64 \text{ N}) = 0.8347 \text{ N} \cdot \text{m}$$

139

**Ecuación 2.**

140 Contenedores:

141 Se eligieron en base al tamaño de las películas, a partir de ello el tamaño del  
 142 contenedor es de 65x65x95 mm, tomando en cuenta que son 4 los contenedores a  
 143 utilizar. El material es plástico en color negro y el rotulado correspondiente a R  
 144 (revelador), F (fijador) y A (agua).



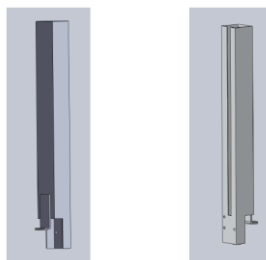
**Figura 5. Diseño del contenedor (65 x 65 x 95 mm).**

145  
 146

147

148 Mecanismo de elevación:

149 El mecanismo que da el movimiento transversal al gancho antes mencionado es un  
 150 tornillo sin fin en arreglo con un par de engranes idénticos, a continuación, se desarrolla  
 151 cada elemento que compone al mecanismo.



**Figura 6. Diseño del mecanismo de elevación.**

152  
 153

154

## 155 **2.2 Electrónica y control**

156

157 Microcontrolador

158 Dentro de la gran variedad de dispositivos utilizados para el desarrollo de proyectos,  
 159 se encuentran los microcontroladores PIC de Microchip® de gama media PIC16. El  
 160 microcontrolador PIC16F887 cuenta con un módulo PWM, empleado en este caso  
 161 para el control del ciclo de trabajo del motor, el cual se eligió considerando su bajo  
 162 costo y fácil adquisición, haciéndolo ideal para el desarrollo del proyecto.

163 A continuación se muestra un diagrama funcional a bloques de la reveladora.  
 164

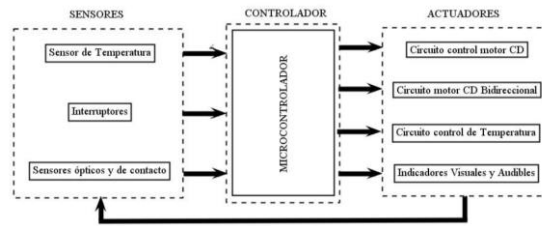


Figura 7. Diagrama de control del prototipo.

165 El diagrama anterior representa como se distribuyen los elementos de la reveladora,  
 166 cabe mencionar que el tipo de control se basa en un sistema de lazo cerrado o  
 167 realimentado (Bishop, R. 2008), como el mostrado en la posterior imagen. Se utiliza  
 168 este tipo de sistema por la necesidad de tener un sistema controlado, es decir tener  
 169 una señal deseada, para este caso tener las variables deseadas (tiempo, temperatura  
 170 y posición).  
 171  
 172  
 173

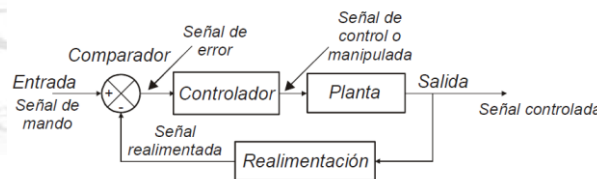


Figura 8. Sistema de control de lazo cerrado.

174 El código de programación para el funcionamiento de la reveladora es lenguaje C  
 175 desarrollado en el compilador "Mikro C®", basándose en el diagrama de flujo siguiente.  
 176  
 177  
 178  
 179

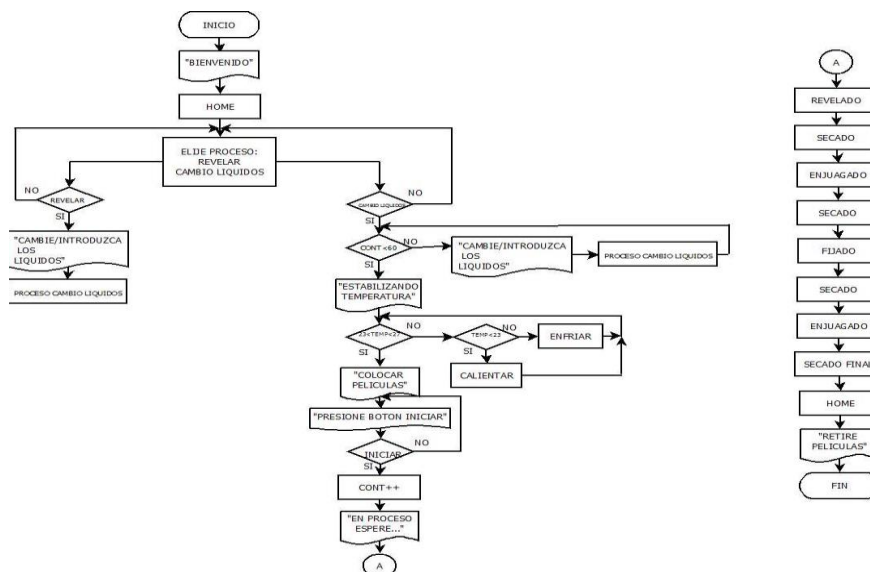


Figura 9. Diagrama de flujo del sistema mecatrónico.

180  
 181  
 182 **3. Resultados.**  
 183

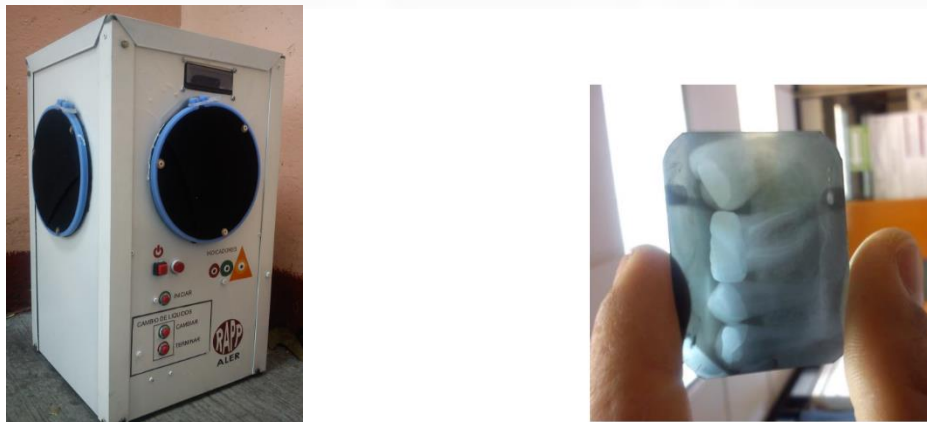
184 Se hicieron pruebas de revelado variando el tiempo y la concentración de los líquidos.  
 185 Las pruebas con el revelador y fijador concentrado, así como los tiempos de cada  
 186 proceso, son los sugeridos por la marca KODAK®, cabe señalar que son los líquidos  
 187 utilizados para las reveladoras manuales. En La tabla 2, se hace referencia a cada  
 188 etapa del proceso donde: R= Revelado, S= secado, E= Enjuague, F= Fijado, el  
 189 subíndice indica la repetición del proceso: S2= segundo enjuague.

190  
 191

**Tabla 2. Concentrado de resultados en pruebas del prototipo**

PRUEBA	R	S <sub>1</sub>	E <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	F	S <sub>3</sub>	E <sub>2</sub>	S <sub>F</sub>	Tiempo total
1	15s	10s	6s	6s	20s	10s	6s	20s	93s
2	10s	10s	10s	10s	15s	10s	10s	20s	95s
3	5s	5s	10s	5s	10s	5s	15s	25s	80s
4	5s	5s	5s	5s	10s	5s	20s	20s	75s
5	5s	2s	2s	2s	10s	2s	30s	25s	78s

192  
 193



**Figura 8. Prototipo y resultados finales.**

194  
 195  
 196

#### 197 4. Conclusiones

198

199 Se cumplieron los objetivos planteados de manera satisfactoria, como todo diseño de  
 200 un prototipo, se hicieron cambios con respecto al diseño y rediseño de algunos  
 201 elementos de los mecanismos. Ya que de manera física se complicó la adquisición de  
 202 piezas por diversos factores. Cabe señalar que en la etapa del control de la  
 203 temperatura también debido al costo y dimensiones establecidas fue conveniente  
 204 analizar otra alternativa de solución para cumplir el objetivo planteado.

205 En cuanto al diseño y construcción de la estructura se obtuvo una máquina con  
 206 dimensiones adecuadas para el correcto funcionamiento de los mecanismos, así como  
 207 del espacio para la manipulación de la película.

208 Se cumplió el revelado de una película periapical por ciclo, ampliando la capacidad de  
209 la reveladora a 5 por ciclo.  
210 Se logró el movimiento transversal de la base para las películas por medio del  
211 mecanismo de elevación.  
212 Se logró el cambio de contenedores mediante el mecanismo giratorio  
213 Se elaboró la tarjeta electrónica para el control de la temperatura de los líquidos y el  
214 funcionamiento de la Reveladora.

215

## 216 **5. Índice de referencias**

217

218 [1] A. Chevalier, *Dibujo Industrial*, (2005), México, Editorial Limusa.

219 [2] Palacios, E. (2004). *Microcontroladores PIC16F84A: Desarrollo de Proyectos*.  
220 Alfaomega.

221 [3] Luna C. *Apuntes Mecatrónica II*.IPN

222 [4] Gómez, S. *Gran libro de Solid Works Office*. (2010). Alfaomega.

223 [5] Bishop, R. (2008) *The Mechatronics Handbook, Mechatronics Systems, Sensors,*  
224 *and Actuators Fundamentals and Modelings*. CRC Press, University of Texas at Austin.

225 [6] Rodríguez J. (2007), *Apuntes Mecatrónica VII*, UPIITA-IPN

226 [7] KODAK© serie de radiografía dental

# PRUEBAS Y ARGUMENTACIONES DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO AL RESOLVER PROBLEMAS DE CUADRATURA DE POLÍGONOS

José Luis López Hernández<sup>1\*</sup>  
Escuela Nacional Preparatoria, Plantel 6  
Universidad Nacional Autónoma de México

ID-POSM047

## Resumen

*En este artículo reportamos las pruebas y argumentaciones dadas por estudiantes de bachillerato (16-17 años de edad) de una escuela pública de la Ciudad de México, al resolver de manera colaborativa, en parejas, problemas de cuadratura de polígonos en ambiente de lápiz-y-papel. Las pruebas y argumentaciones dadas por los estudiantes a los problemas que les fueron propuestos coinciden con las reportadas en la literatura de investigación relacionada con este tema.*

*Nuestros resultados sugieren que en sus pruebas y argumentaciones con frecuencia los estudiantes se apoyan en evidencias empíricas, intuiciones e incluso en experiencias personales surgidas de las figuras geométricas que les fueron proporcionadas en los problemas; sin embargo, también se identifican estudiantes que hacen buen uso de un razonamiento deductivo formal y de un lenguaje simbólico claro y ordenado propio de las matemáticas.*

**Palabras clave:** Cuadratura, polígonos, resolución de problemas, geometría, pruebas y argumentaciones.

## 1. Introducción

El razonamiento es un elemento clave en el quehacer matemático, contribuye en la organización de las ideas y en la articulación del discurso, para la comunidad matemática es importante incluir algunas demostraciones desde el bachillerato y solicitar a los estudiantes cierto nivel de rigor. Sin embargo, para Balacheff (1987) no se debe esperar que estos estudiantes razonen de una manera rigurosa y formal, dado que en este nivel educativo básicamente ellos comienzan a aprender, a usar las matemáticas y a comprender y manejar sus métodos de demostración.

Para Hanna y Barbeau (2008) el acto mismo de la elaboración de una prueba contribuye al desarrollo de nuevas ideas matemáticas y proporciona a los estudiantes nuevas estrategias y métodos para la resolución de problemas.

Con frecuencia las representaciones gráficas de objetos y conceptos geométricos pueden producir diversas dificultades durante los procesos de la demostración y en la resolución de problemas en geometría, pero, trabajar con una representación aporta ciertas ventajas; por ejemplo, en determinado momento proporciona nuevas ideas que ayudan a avanzar o a corregir sobre lo ya realizado.

<sup>1\*</sup> Autor para la correspondencia. E-mail: jose.lopez@enp.unam.mx. Tel. 55 3728 1092.

42 Es por ello que se ha decidido poner atención en el **problema de las cuadraturas**,  
43 que consiste en construir un cuadrado de área igual a la de un polígono dado y  
44 construir, en general, figuras de áreas iguales (Boyer, 1999; Boltyanskii, 1973; Collette,  
45 2006, entre otros). Llama también la atención el estudio de figuras planas cuya área  
46 permanece constante y cuyo perímetro varía (Frederickson, 1997; Galván, 2005; entre  
47 otros).

48 El problema de las cuadraturas ha despertado en diferentes épocas y hasta la  
49 actualidad el interés de investigadores en educación matemática, así como de  
50 profesores y estudiantes.

51

## 52 **2. Marco Conceptual**

### 53 **El concepto de demostración**

54 Dentro de la comunidad matemática la demostración se sigue a través de un  
55 razonamiento deductivo válido y formal, riguroso. Por ejemplo, Zaslavsky et al, (2012),  
56 comentan que un propósito de la demostración en matemáticas es explicar por qué  
57 una afirmación matemática es verdadera, dadas ciertas suposiciones. Sin embargo,  
58 en el ámbito de la matemática educativa la demostración ha sido abordada desde  
59 distintos enfoques. De acuerdo con diferentes investigaciones, se ha discutido la  
60 importancia de la demostración y sus grados de validez; es decir, la demostración se  
61 refiere a un proceso de argumentación que genera y valida conocimientos. Así mismo,  
62 se ha puesto énfasis en los tipos de argumentación dados por los estudiantes en los  
63 diversos niveles educativos.

64 Por ejemplo, para Grabiner (2012), las demostraciones proporcionan explicaciones  
65 para convencer de la validez y sentido de algún resultado, llevan a cabo verificaciones  
66 al ayudar a distinguir entre lo verdadero y lo plausible y logran el descubrimiento de  
67 propiedades, entre otras de sus bondades. Balacheff (1987) menciona dos tipos de  
68 demostraciones: (a) las intelectuales, apoyadas en propiedades matemáticas y en las  
69 relaciones que existen entre ellas y, (b) las pragmáticas, en que los estudiantes  
70 recurren a la acción y a ejemplos concretos, las cuales se subdividen en varios tipos:  
71 el empirismo ingenuo, la experiencia crucial, el ejemplo genérico y la experiencia  
72 mental.

73 Siñeriz y Ferraris (2005) y Hanna (1990), entre otros, se refieren al tipo de lenguaje y  
74 grado de formalidad utilizados en la demostración, como son la argumentación  
75 deductiva formal, la argumentación deductiva coloquial, la explicación coloquial, la  
76 explicación por evidencia y la explicación por dibujo, además de la prueba formal, la  
77 prueba que demuestra y la prueba que explica. En tanto Camargo, Perry y Samper  
78 (2005), así como Palais (1999), destacan la importancia del razonamiento y la  
79 visualización.

80

### 81 **3. Metodología o desarrollo**

82 En esta investigación de tipo cualitativo participaron 12 estudiantes (entre 16 y 17 años  
83 de edad) de distintos grupos de bachillerato en la Ciudad de México, que cursaban en  
84 ese momento la asignatura Matemáticas V. Los estudiantes trabajaron de manera

85 colaborativa en equipos de dos integrantes cada uno; ellos fueron videograbados  
 86 mientras resolvían problemas de cuadratura de polígonos en ambiente de lápiz-y-  
 87 papel. El acopio de datos se llevó a cabo por medio de videograbaciones y hojas de  
 88 trabajo.

89 Debido a limitaciones de espacio, en este artículo, sólo reportamos el trabajo del  
 90 Equipo 1 resolviendo el Problema 1.

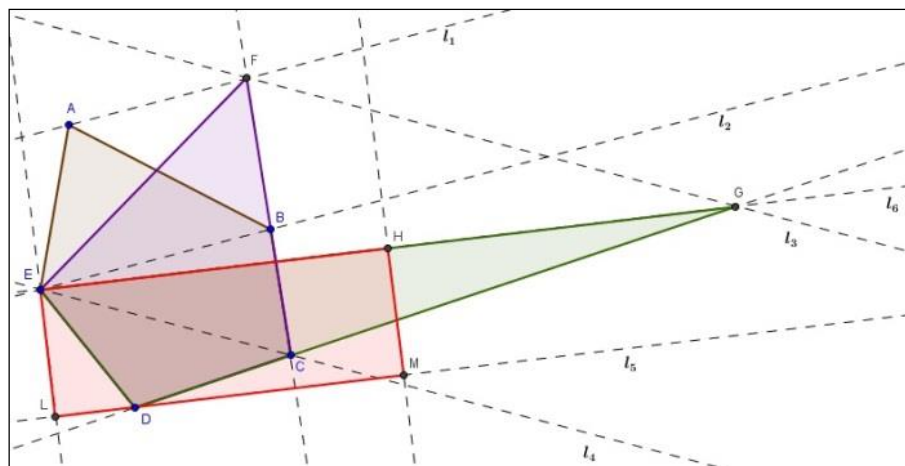
91

92 **4. Resultados y análisis**

93 En seguida se muestran algunos extractos de la discusión y reflexión que llevaron a  
 94 cabo los estudiantes (E1 y E2) del Equipo 1 al resolver el Problema 1, así como la  
 95 descripción y el análisis de los datos obtenidos en relación con sus respuestas. Ellos  
 96 trabajaron en pareja de manera colaborativa, compartieron conocimientos y  
 97 discutieron acerca de sus soluciones en cada problema. La recolección de los datos  
 98 se llevó a cabo por medio de videograbaciones que evidencian el trabajo de los  
 99 estudiantes, así como sus respuestas por escrito.

100

101 **Problema 1.** En la Figura 1, las rectas  $l_1, l_3$  y  $l_5$  son, respectivamente, paralelas a las  
 102 rectas  $l_2, l_4$  y  $l_6$ , y H es punto medio de  $\overline{EG}$ .



103

104 **Figura 1. Polígonos de la misma área y de perímetro distinto.**

105 (a) Prueba que las áreas de:

106 (i)  $\text{pent} ABCDE^2$  con la del  $\text{quad} CDEF^3$ ,

107 (ii)  $\text{quad} CDEF$  con la del  $\text{tri} DEG^4$ ,

<sup>2</sup>  $\text{pent} ABCDE$  se refiere a cualquier pentágono cuyos vértices son los puntos A, B, C, D y E.

<sup>3</sup>  $\text{quad} CDEF$  se refiere a cualquier cuadrilátero cuyos vértices son los puntos C, D, E y F.

<sup>4</sup>  $\text{tri} DEG$  se refiere a cualquier triángulo cuyos vértices son los puntos D, E y G.

- 108 (iii)  $\triangle DEG$  con la del  $\square EHML$ <sup>5</sup> son iguales.  
 109 (b) Da argumentos convincentes para mostrar que las áreas de todos estos  
 110 polígonos son iguales.

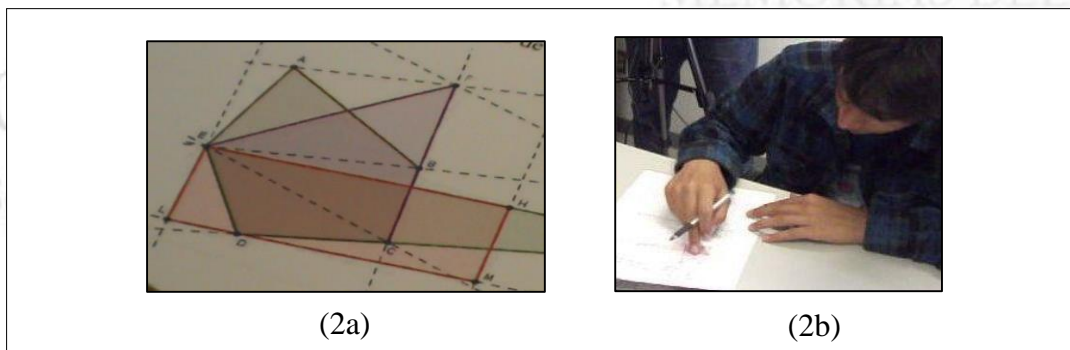
111

112 **Desarrollo y análisis de la solución del Problema1**

113 **(a) (i) Igualdad de las áreas de  $\blacklozenge ABCDE$  y de  $\diamond CDEF$**

114 E1: Ah, estos [ $\blacklozenge ABCDE$  y  $\diamond CDEF$ ; *Figura 2a*] tienen áreas en común [*señala con su*  
 115 *dedo  $\diamond BCDE$ ; *Figura 2b*] y estos [*señala con su dedo  $\triangle ABE$  y  $\triangle FBE$ ] tienen la*  
 116 *misma altura. Y como su base es común... [E2 dice: Sí. En seguida comienzan*  
 117 *a escribir la prueba que se muestra en la *Figura 3a*].**

118 **Equipo 1. Argumentación deductiva formal**



119

120 **Figura 2. En (2b), E1 explica a E2 por qué las áreas de  $\blacklozenge ABCDE$  y de  $\diamond CDEF$  que se muestran**  
 121 **en (2a) son iguales.**

<p>i) Siendo <math>l_1</math> y <math>l_2</math> paralelas, tenemos que el área de los triángulos <math>\triangle BEF</math> y <math>\triangle ABE</math>, al compartir base, es la misma.</p> <p><math>\therefore A(\blacklozenge ABCDE) = A(\diamond BCDE) + A(\triangle ABE)</math></p> <p><math>A(\diamond CDEF) = A(\diamond BCDE) + A(\triangle BEF)</math></p> <p><math>\therefore A(\blacklozenge ABCDE) = A(\diamond CDEF)</math></p>	<p>i) Siendo <math>l_1</math> y <math>l_2</math> paralelas, tenemos que el área de los triángulos <math>\triangle BEF</math> y <math>\triangle ABE</math>, al compartir base, es la misma.</p> <p>Si <math>A(\blacklozenge ABCDE) = A(\diamond BCDE) + A(\triangle ABE)</math></p> <p><math>A(\diamond CDEF) = A(\diamond BCDE) + A(\triangle BEF)</math></p> <p><math>\therefore A(\blacklozenge ABCDE) = A(\diamond CDEF)</math></p>
(3a)	(3b)

122

123 **Figura 3. Prueba escrita de E1 y E2 para la sección (a) (i) de que las áreas de  $\blacklozenge ABCDE$  y**  
 124  **$\diamond CDEF$  son iguales.**

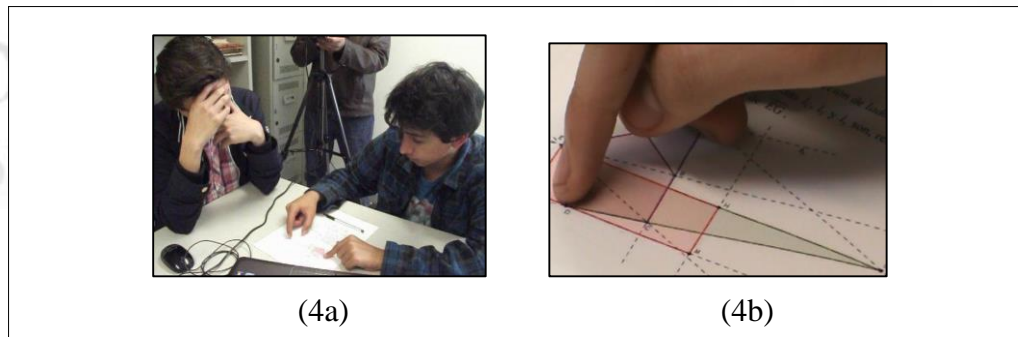
125 **(a) (ii) Igualdad de las áreas de  $\diamond CDEF$  y de  $\triangle DEG$**

126 E1: Esta área [*señala con su dedo  $\triangle CDE$ ] es común a ambas [*señala con su dedo*  
 127  *$\diamond CDEF$  y  $\triangle DEG$ ] y estas dos [*señala con su dedo las rectas  $l_3$  y  $l_4$ ] son***

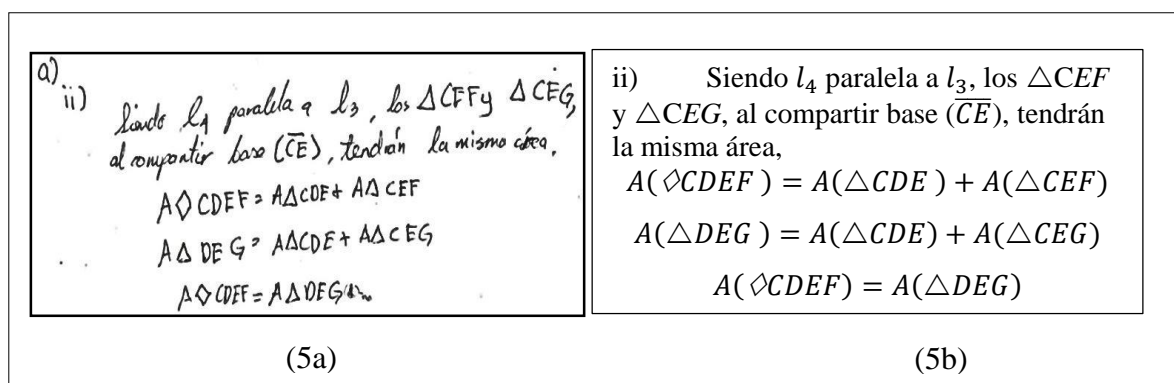
<sup>5</sup>  $\square EHML$  se refiere a cualquier rectángulo cuyos vértices son los puntos E, H, M y L.



- 128 paralelas. [Véase la Figura 4a]
- 129 E1: Entonces estos dos triángulos [señala con su dedo  $\triangle CEF$  y  $\triangle CEG$ ] son iguales.
- 130 E2: Sí, este punto [se refiere al punto de intersección del lado  $\overline{CF}$  de  $\diamond CDEF$  con el
- 131 lado  $\overline{EG}$  de  $\triangle DEG$ ]....
- 132 En seguida, E2 se refiere a la región común entre  $\diamond CDEF$  y  $\triangle DEG$ . Si  $P$  es el punto
- 133 de intersección del lado  $\overline{CF}$  de  $\diamond CDEF$  con el lado  $\overline{EG}$  de  $\triangle DEG$ , entonces, la región
- 134 común a ambos polígonos es  $\diamond CDEP$ .
- 135 E2: Sí bueno, al recortar lo común [se refiere a  $\triangle CDE$  y lo señala con su dedo]. [Véase
- 136 la Figura 4b]
- 137 E1: Sí, este triangulito [señala con su dedo  $\triangle CDE$ ; Figura 4b] es común, ya los otros
- 138 [se refiere a  $\triangle CEF$  y  $\triangle CEG$ ] tienen áreas... [Se refiere a que las áreas son
- 139 iguales].



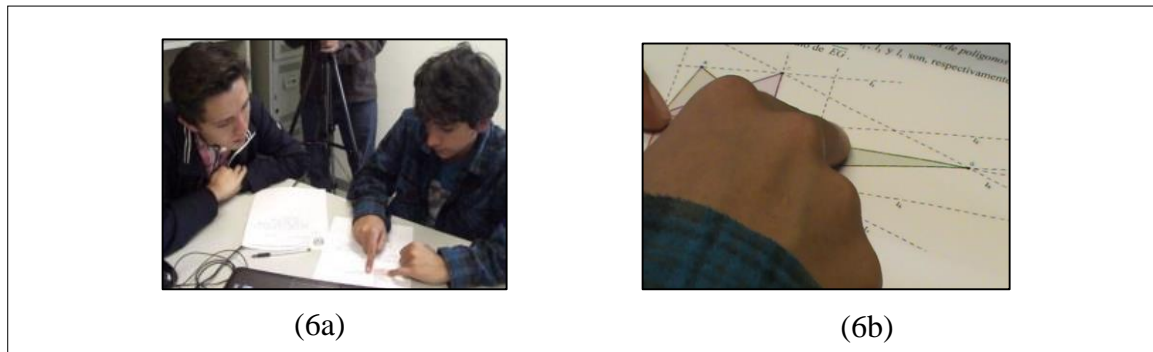
- 140
- 141 **Figura 4.** En (4a) E1 y E2 identifican las paralelas  $l_3$  y  $l_4$  relacionadas con  $\diamond CDEF$  y  $\triangle DEG$ , y en
- 142 (4b) identifican la región común a estos polígonos.
- 143 A continuación, los estudiantes escriben su respuesta en el papel (Figura 5).



- 144
- 145 **Figura 5.** Prueba escrita de E1 y E2 para la sección (a) (ii) de que las áreas de  $\diamond CDEF$  y  $\triangle DEG$
- 146 son iguales.
- 147 **(a) (iii) Igualdad de las áreas de  $\triangle DEG$  y de  $\square EHML$**
- 148 E1: Ahora para  $\triangle DEG$  y  $\square EHML$  (Figura 6a). Esto, como nos dijeron que es punto
- 149 medio [se refiere a  $H$ , pero al mismo tiempo señala con sus dedos los puntos  $E$  y  $H$ ;

150 *Figura 6b)* pues sí, ya está. [*Se refiere a que con eso ya es suficiente, que ya está*  
 151 *probado.*]

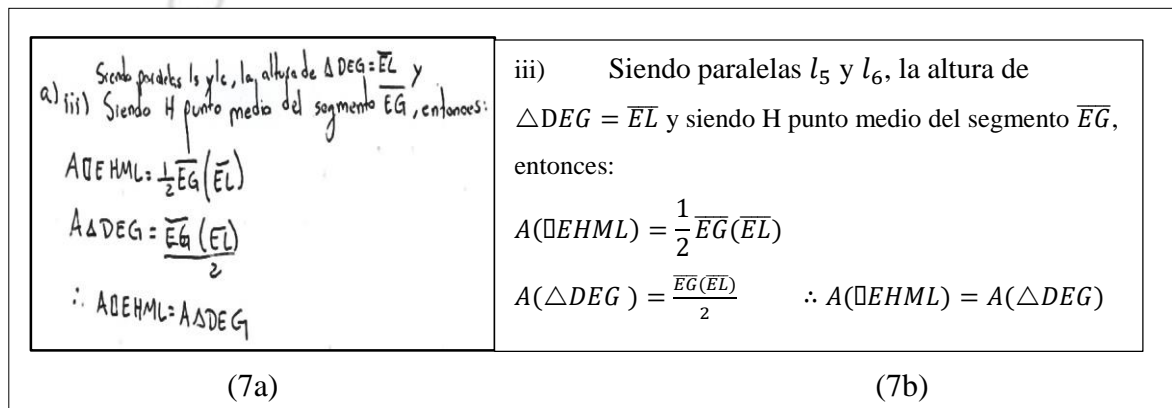
152 E2: Ah, es lo mismo, sí. Como son paralelas ésta y ésta [*señala con su dedo  $l_6$  y  $l_5$ .*  
 153 *En seguida E1 comienza a escribir la prueba que se muestra en la Figura 7a).*...



154

155 **Figura 6. E1 explica a E2 la igualdad de las áreas de  $\triangle DEG$  y  $\square EHML$ .**

156 A continuación, los estudiantes escriben su respuesta en el papel (Figura 7).



157

158 **Figura 7. Prueba escrita de E1 y E2 para la sección (a) (iii) de que las áreas de  $\triangle DEG$  y  $\square EHML$**   
 159 **son iguales.**

160

161 **(b) Da argumentos convincentes para mostrar que las áreas de todos los**  
 162 **polígonos mostrados en la Figura 1 son iguales.**

163 E1 y E2: Si una es igual a la otra y la otra es igual a la otra... [*Se refieren a que todas*  
 164 *y cada una de las áreas involucradas son iguales.*]

165 E2: Pues ya... [*E1 dice: Pues sí. En seguida Comienzan a escribir la prueba que se*  
 166 *muestra en la Figura 8a).*]

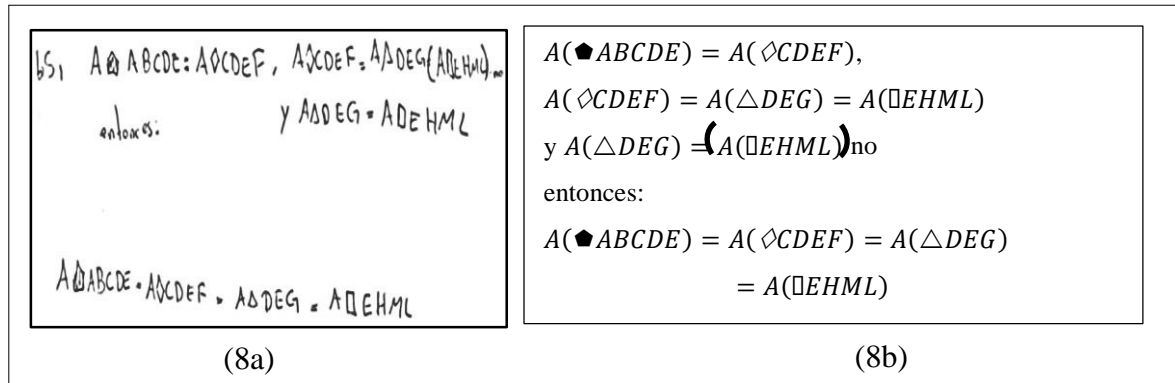


Figura 8. Respuesta escrita de E1 y E2 para la sección (b) del Problema 1.

167  
168  
169

170 Durante la resolución del Problema 1, los estudiantes dialogaron haciendo uso del  
 171 lenguaje coloquial, que en ocasiones fue impreciso; sin embargo, es de llamar la  
 172 atención el uso del lenguaje simbólico formal en sus respuestas por escrito. En los tres  
 173 apartados de (a) del Problema 1, E1 y E2 utilizaron un señalamiento para dar claridad  
 174 a su explicación y justificación del por qué son iguales las áreas de los polígonos de  
 175 interés, así como para distinguir los otros polígonos involucrados en su discurso. Ellos  
 176 incorporaron conocimientos previos relacionados con conceptos básicos de geometría  
 177 que desde un principio pusieron en acción, como se muestra en sus diálogos y en las  
 178 figuras 3 a 8. En la resolución del Problema 1 se manifiesta la presencia de la  
 179 argumentación deductiva formal por parte de los estudiantes del Equipo E1.

180

### 181 5. Conclusiones

182 Se observa que los estudiantes E1 y E2 del Equipo 1 sí utilizaron un lenguaje simbólico  
 183 formal con claridad y elaboraron, de manera aceptable, las demostraciones  
 184 relacionadas con la cuadratura de polígonos relacionadas con el Problema 1; sin  
 185 embargo, en la mayoría de las ocasiones esto no ocurre con los estudiantes de  
 186 bachillerato, ellos con frecuencia utilizan el lenguaje coloquial al abordar este tipo de  
 187 problemas.

188 Este tipo de experiencias brinda a los estudiantes nuevas estrategias para la  
 189 resolución de problemas y puede ayudarles a desarrollar un pensamiento lógico y  
 190 crítico en matemáticas con el apoyo del profesor. Ellos necesitan desarrollar un  
 191 razonamiento intuitivo acerca de los objetos geométricos para tener acceso a un mejor  
 192 entendimiento de la geometría euclidiana y a un razonamiento deductivo formal para  
 193 su estudio; para lograr lo anterior, se requiere tomar en cuenta el tipo de tareas a  
 194 resolver y la manera en que éstas son guiadas por parte de los profesores e  
 195 investigadores.

### 196 5. Índice de referencias

197 Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational*  
 198 *Studies in Mathematics*, 18(12), 147-176.

- 199 Boltyanskii, V. G. (1973). Figuras equivalentes y equidescomponibles. México.  
200 Editorial Limusa.
- 201 Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- 202 Collette, J. P. (2006). *Historia de las matemáticas I*. México: Siglo XXI Editores.
- 203 Frederickson, G. N. (1997). *Dissections: Plane and Fancy*. USA: Cambridge University  
204 Press.
- 205 Galván, C. (2005). Cuadratura de polígonos. *Unión*, 1, 7-15.
- 206 Grabiner J.V. (2012). “Why proof? A historian’s perspective”. En Hanna, G., de Villiers,  
207 M. (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp.  
208 147–167).
- 209 Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- 210 Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM.*  
211 *The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 345-353.
- 212 Palais, R. S. (1999). The visualization of mathematics: toward a mathematical  
213 exploratorium. *Notices of the AMS*, 46(6), 647-658.
- 214 Siñeriz, L. & Ferraris C. (2005). Tipos de prueba: una de las categorías de un modelo  
215 teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría. *Memorias del*  
216 *VII Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy.
- 217 Zaslavsky, O., Nickerson, S., Styliandes, A., Kidron, I. & Winicki, G. (2012). The need  
218 for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In G. Hanna, &  
219 M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 215-229).

# ROBÓTICA EDUCATIVA: OPCIÓN ASEQUIBLE PARA QUE DOCENTES DE SECUNDARIA DESARROLLEN PENSAMIENTO COMPUTACIONAL EN SUS ALUMNOS

Quiroz Gleason José Luis Medardo<sup>1\*</sup>, Elizarrarás Baena Saúl<sup>2</sup> y Vázquez Pérez Orlando<sup>3</sup>

*Escuela Normal Superior de México. Manuel Salazar 201, Hacienda del Rosario,  
Azcapotzalco, Ciudad de México, 02420.*

**ID-POSM051**

## Resumen

Hasta hace poco tiempo la robótica parecía un terreno vedado a la educación en casi todos los niveles, no solo por los costos sino por la poca experiencia para aplicarla de forma educativa. Actualmente el ámbito educativo privado ya incluye Robótica Educativa como (Viegas 2017) un entorno de aprendizaje en el que conciliamos lo concreto y lo abstracto en tareas de resolución de problemas cuya solución puede requerir conocimientos de diversas áreas científicas, desde temprana edad en sus cursos, pero hay opciones reales factibles para incluirlo también en el sector educativo oficial. El desarrollo del pensamiento computacional tanto como la competencia digital se ven favorecidas con el aprendizaje de lenguajes de programación, pero en mejor medida con las opciones que provee la robótica educativa.

Los retos al desarrollar cursos de Robótica Educativa en el entorno de escuelas oficiales son, principalmente, los costos de los recursos robóticos y electrónicos, poca infraestructura para atender grandes matrículas, y las pocas o nulas nociones sobre el tema, por parte de los docentes.

Aprender robótica educativa implica conocer<sup>1</sup> el funcionamiento de componentes electrónicos y cierto hardware, (como Arduino) así como armado de los mismos, las bases de la robótica en general, destrezas algorítmicas de programación (como Scratch), y en especial de programación de robots como (VEXCode VR).

Los docentes de secundarias oficiales pueden adentrarse al mundo de la Robótica Educativa sin grandes inversiones. Solo se requiere, un aula digital con conexión a internet (un buen número de escuelas en el país cuentan con ella), programas como Scratch, TinkerCAD y VEXCode y el compromiso para seguir intentando ensanchar el horizonte digital que mejore el pensamiento computacional y competencia digital de nuestros alumnos de educación media.

**Palabras clave** Robótica, Educativa, docentes, secundaria, pensamiento, computacional.

## 1. Introducción

La experiencia acumulada a lo largo de más de 40 años en la docencia con actividades en aulas desde kínder hasta nivel licenciatura, me han llevado a interesar, en lo posible, a mis alumnas y alumnos por el empleo y aprovechamiento de una computadora en general y en particular de las destrezas y competencias que con su uso pueden favorecerse.

Desde 1997 la mira se enfocó también en los futuros docentes en le Escuela Normal Superior de México y a partir del año 2000, ya fue posible que los recién egresados pudieran aplicar en aulas digitales en secundarias oficiales, lo aprendido.

<sup>1\*</sup> Autor para la correspondencia. E-mail: qgleason@yahoo.com.mx. Tel. 5519488102

45 A partir de ese entonces, la intención se ha centrado en incluir en la medida de lo  
46 posible, aprender programación como herramienta para desarrollar habilidades  
47 digitales y plantear el camino hacia el desarrollo del pensamiento computacional en el  
48 alumnado.

49 Aprender a programar es un antecedente necesario para formarse, o al menos  
50 introducirse en el ámbito de la robótica educativa. Que los futuros docentes pudieran  
51 aprovechar sus exiguas nociones de computación y de aplicaciones computacionales  
52 en beneficio de su cátedra en las secundarias oficiales, era poco menos que un sueño.  
53 Sin embargo, a partir del año 2000 con la puesta en marcha del programa de aulas  
54 digitales, fue generalizándose la posibilidad de contar con horas, o al menos una hora  
55 por grupo, para usar la computadora. Los ámbitos de aprovechamiento de una  
56 computadora por parte de los docentes iban desde búsquedas en internet (a veces sin  
57 dirección ni monitoreo) al uso de hoja de cálculo, procesadores de texto y programas  
58 de presentación electrónica de información. El uso de programas estaba restringido a  
59 productos originales cuyo precio los hacía prohibitivos. Ahí es donde el software de  
60 licencia abierta es donde podía aprovecharse sin riesgo alguno y sin comprometer a  
61 los docentes encargados de dichas aulas digitales.

62 Tanto programar, como aprender robótica educativa son dos de los ámbitos que  
63 pueden muy bien abordarse desde plataformas gratuitas como Scratch, TinkerCAD y  
64 VEXCode, por ejemplo.

65 De ahí que aprender a programar reviste especial importancia toda vez que, la  
66 programación se ha convertido en una extensión de la escritura, la lectura y la  
67 aritmética, y como tal existen numerosas razones para que se extienda su aprendizaje,  
68 Resnick, Maloney, Hernández, Rusk, Eastmond, Brennan, Millner, Rosenbaum, Silver,  
69 Silverman y Kafai, (2009), en Sáez y Cózar (2017).

70 Programar es una competencia básica de alto nivel que nos ayuda a la solución de  
71 problemas complejos de manera creativa, inteligente y colaborativa: Los conceptos  
72 computacionales que utilizan para abordar y resolver problemas, gestionar nuestra  
73 vida cotidiana y para comunicarnos e interactuar con otras personas, Wing, (2006)  
74 citado por Sáez (2017).

75 Sin embargo, cuando se trata de desarrollar dicha competencia en los futuros maestros  
76 de matemáticas, el aprender a programar entraña dificultades diferentes.

77

78 ¿Qué relación hay entre las habilidades digitales y el pensamiento computacional y  
79 aprender a programar y robótica educativa?

80

81 Varios autores establecen sus definiciones al respecto, pero, siguiendo con Levano,  
82 (2019), se redondea en que las competencias digitales abarcan saberes y capacidades  
83 de carácter tecnológico las que deben ser gestadas en primer orden a nivel de la  
84 educación superior y que, además, deben tener como sustento una red de elevada  
85 complejidad en la alfabetización tecnológica peor con carácter funcional.

86 Es necesario, entonces hacer referencia a la competencia digital, que es asumida  
87 como instrumento de gran utilidad que permite la movilización de actitudes,  
88 conocimientos y procesos; por medio de los cuales los docentes adquieren habilidades  
89 para facilitar la transferencia de conocimientos y generar innovación, citando a Marza

90 y Cruz (2018) en Levano et al (2019), Sin olvidar, por supuesto la sutil referencia que  
91 cita Zavala et al, (2016) al referirse al uso crítico y seguro de las Tecnologías de la  
92 Sociedad de la Información para el trabajo, el tiempo libre y la comunicación,  
93 apoyándose en habilidades TIC básicas como el uso de ordenadores para recuperar,  
94 evaluar, almacenar, producir, presentar e intercambiar información, y para comunicar  
95 y participar en redes de colaboración a través de Internet.

96 El pensamiento computacional se identifica, como cita González J, et al (2016), como  
97 una de las competencias que deben permitir a cualquier ciudadano, con independencia  
98 de su quehacer profesional, la gestión óptima de todas las situaciones; abundando al  
99 citar a Wing, (2006) en Sáez (2017). el pensamiento computacional permitirá a los  
100 alumnos, como herramienta básica transversal al currículum, aprender de forma  
101 abstracta, algorítmica-lógica y, por ende, les preparará para resolver problemas  
102 complejos y abiertos.

103 Para la International Society for Technology in Education (ISTE) y la Computer  
104 Science Teachers Association (CSTA), según Sáez y Cózar (2017) el pensamiento  
105 computacional, incluye las siguientes características pero no se limita a las mismas: la  
106 formulación de problemas de una manera que nos permite utilizar una computadora y  
107 otras herramientas para ayudar a resolverlos; organizar y analizar datos lógicamente;  
108 representación de datos a través de abstracciones, como modelos y simulaciones;  
109 automatización de soluciones a través del pensamiento algorítmico (una serie de  
110 pasos ordenados); identificación, análisis y aplicación de las posibles soluciones con  
111 el objetivo de lograr la combinación más eficiente y eficaz de los pasos y recursos;  
112 generalizar y transferir este proceso de resolución de problemas para una amplia  
113 variedad de problemas.

114

## 115 **2. Metodología o desarrollo**

116

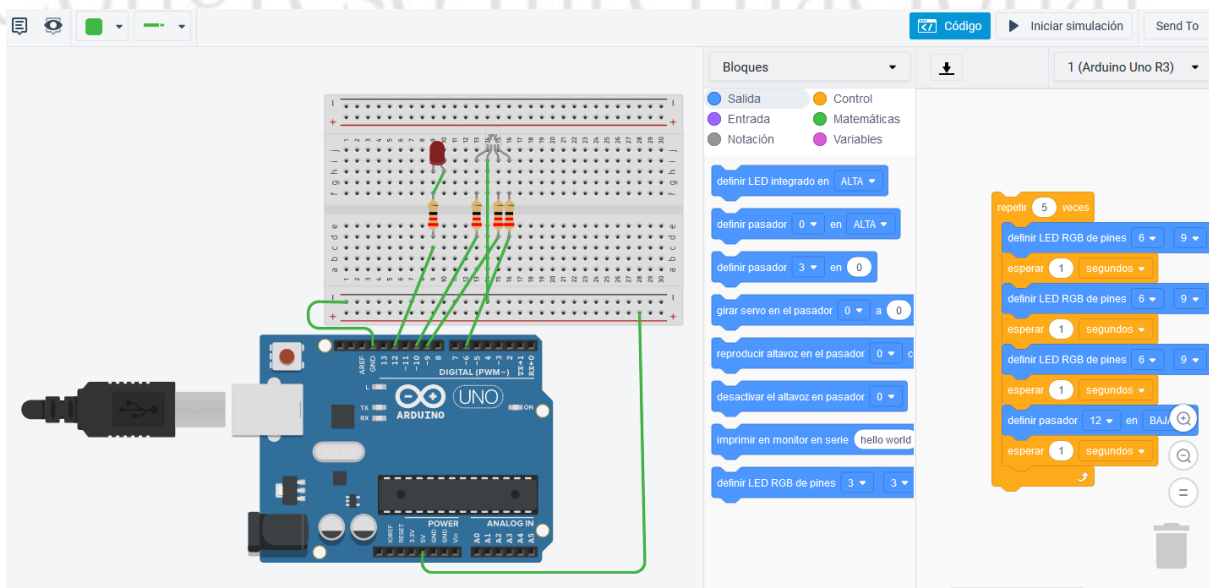
117 En los últimos años, aprender a programar, es una consideración que se toma en  
118 cuenta en diversos planes de estudio en distintos niveles y en distintos países; en  
119 Inglaterra, por ejemplo, citado por Saez y Cózar (2017), desde el curso académico  
120 2014-2015, se ha incluido la programación de ordenadores y el pensamiento  
121 computacional en los planes de estudio de Educación Primaria y Secundaria a través  
122 de la asignatura denominada Computing (Department for Education England, 2013) y  
123 en España, siguiendo a Saez y Cózar (2017), en el ciclo escolar 2015-2016 se incluyó  
124 en 1º y 3º de Escuela Secundaria Obligatoria (ESO) una asignatura libre de Tecnología  
125 Programación y Robótica, desarrollando contenidos de programación y pensamiento  
126 computacional.

127 En los planes de estudio en nuestro país, SEP (2018), se incluye como asignatura  
128 optativa en el programa 2018 de Educación Normal Superior, un semestre de  
129 Programación y otro de Robótica Educativa, en el trayecto optativo opcional de  
130 Tecnología, pero independientemente de la actualización de los programas de  
131 estudios, para los maestros en servicio se abren posibilidades viables de aprendizaje,  
132 de autoaprendizaje en realidad, pero que por su facilidad y gratuidad es que se  
133 constituyen en una opción viable, verdaderamente asequible para los docentes de las  
134 secundarias oficiales del país.

135 Empecemos por las opciones para aprender a programar.  
136 A pesar de existir un buen número de opciones de lenguajes de programación, Scratch  
137 es una alternativa sencilla y atractiva para la adolescencia.  
138 Esta herramienta, MIT (2000), es un lenguaje de programación visual creado por el  
139 MIT (Massachusetts Institute of Technology) y orientado a **facilitar su aprendizaje de**  
140 **forma intuitiva mediante bloques**, donde en lugar de escribir código se tienen  
141 diferentes piezas como si se tratase de un rompecabezas que definen procesos,  
142 herramientas acciones, variables para desarrollar las diferentes órdenes que se  
143 integran hasta tener un proyecto, que podría ser perfectamente un videojuego o imitar  
144 a un robot.  
145 El uso de Scratch en el aula favorece el desarrollo de competencias y habilidades para  
146 analizar y resolver problemas. Asimismo, los alumnos aprenden conceptos básicos de  
147 computación y matemáticas, y también estrategias de diseño y otras formas de  
148 colaboración en Sáez y Cózar (2017) al citar a Basogain et al., (2015).  
149 Por otro lado, el trabajo a través de herramientas, programación y hardware posibilita  
150 entender principios fundamentales de la ciencia de la computación, analizar y resolver  
151 problemas mediante la aplicación de técnicas computacionales, escribir un programa  
152 relativo a estos problemas, aplicar la tecnología y tener la competencia como usuarios  
153 en el campo de la tecnología.  
154 Existen una gran cantidad de material, recursos, videos, tutoriales para poder llevar a  
155 buen término un curso de autoaprendizaje de programación con Scratch, con solo  
156 teclearlo en cualquier buscador de internet.  
157 Ahora bien, respecto de Robótica Educativa, según Viegas (2017), es un entorno de  
158 aprendizaje en el que reconciliamos lo concreto y lo abstracto en problemas resolver  
159 tareas cuya solución puede requerir conocimientos de diversas áreas científicas. Es  
160 decir, en el contexto escolar, dependiendo del proyecto a desarrollar, puede terminar  
161 en valiosos logros pedagógicos tanto como en la ampliación de los horizontes de las  
162 posibilidades de los recursos herramientas (disponibles) para desarrollar la enseñanza  
163 y el aprendizaje.  
164 Para Gallego (2010), en Moreno (2012), la importancia de la robótica educativa radica  
165 en que:  
166 •Aglutina ciencias y tecnologías: matemáticas, física, informática...  
167 •Fomenta la imaginación, despierta inquietudes y ayuda a comprender mejor el mundo  
168 que nos rodea.  
169 •Permite el trabajo en equipo facilitando la comunicación, responsabilidad, toma de  
170 decisiones...  
171 Aprender a programar y luego programar un robot, son actividades que fomentan la  
172 creatividad, la habilidad para resolver problemas al intentar una y otra vez, en cada  
173 ocasión y por diversos caminos y estrategias ejecutar una serie de acciones que  
174 conlleven a cumplir una tarea al robot, artefacto en cuyo elaboración pudo participarse  
175 (aunque a veces de manera virtual), pero con plena conciencia de los alcances y  
176 limitaciones de sus componentes, llámense circuitos, sensores, resistencias,  
177 actuadores, plataforma base, o generadores de energía.  
178 Por consiguiente, existen diversos enfoques a la hora de enseñar a través de la  
179 robótica, todo dependerá de la manera en que se utilice durante el proceso de



180 enseñanza-aprendizaje, según Olaskoaga, (2009), en Moreno (2012) que puede ser:  
 181 como objeto de aprendizaje, como medio de aprendizaje o como apoyo al aprendizaje.  
 182 Para tal efecto podemos valernos en dos plataformas: TinkerCAD y VexCOde VR.  
 183 TinkerCAD es una herramienta de software gratuito en línea  
 184 (<https://www.tinkercad.com>) creada por la empresa Autodesk como líder en diseño 3D,  
 185 ingeniería y software de entretenimiento, según dice en su propio sitio, con el fin de  
 186 diseñar modelos en 3D e imprimirlos en la misma tecnología, pero además, permite  
 187 diseñar circuitos con componentes electrónicos virtuales, que van desde leds,  
 188 sensores diversos, zumbadores, motores, resistencias, protoboards de Arduino, etc.,  
 189 con la finalidad de simular fielmente su funcionamiento.  
 190 Una vez que se diseña un circuito (se requieren algunos conocimientos básicos de  
 191 física y electricidad, pero no indispensables) es posible programar su uso con ayuda  
 192 del bloque de código en Scratch (que luego puede traducirse a lenguaje texto) y una  
 193 vez terminado la secuencia de bloques se puede ejecutar la simulación para verificar  
 194 el cumplimiento del circuito: si se encienden los leds en la secuencia establecida, si  
 195 los sensores detectan luz o cercanía de un objeto, etc. (Ver figura 1).  
 196



197 **Figura 1. Entorno de trabajo TinkerCAD. Circuito terminado y bloques de programación**

198  
 199  
 200 El sitio cuenta con muy buenos ejemplos y tutoriales para la elaboración de los circuitos  
 201 básicos y aparte pueden encontrarse gran cantidad de ejemplos claramente explicados  
 202 para perfeccionarse en el diseño de circuitos y empleo de los componentes que la  
 203 plataforma ofrece.  
 204 Si ya se tuvo cierta destreza en la gestión y programación de circuitos es hora de  
 205 programar a un robot fabricado con antelación (pero empleando muchos de los  
 206 componentes que aprendimos a usar en la plataforma anterior).  
 207 Se trata ahora de VexCOde VR (<https://vr.vex.com>).  
 208 El sitio gratuito soporta la posibilidad de programar un robot de acuerdo con las  
 209 instrucciones que se le administren a través de un programa de bloques de código

210 Scratch para realizar una determinada tarea. Puede ser una definida por el usuario, o  
 211 bien responder a un reto planteado por la misma plataforma y con la posibilidad de  
 212 ejecutar el programa y observar, y en su caso, comprobar que la tarea sea cumplida,  
 213 o bien, mirar cómo el robot sale de la plataforma y cae al vacío por errar en la secuencia  
 214 de instrucciones.  
 215 El escenario que se identifica a la derecha de la figura 2, muestra el recuadro donde  
 216 el robot se desplaza: existe la posibilidad de variar entre tres vistas, a ras de piso,  
 217 altura media o vista desde dron, con las cuales puede apreciarse con mayor detalle la  
 218 actuación del robot y descubrir los fallos en caso de que no se cumpla la trayectoria y  
 219 tareas deseadas o encomendadas, o bien cómo optimizar recorridos para cumplir con  
 220 cabalidad la tarea o en menor tiempo. En dicho escenario también existe la posibilidad  
 221 de visualizar los datos del robot en acción, como son velocidad, estatus del  
 222 parachoques y sensor de vista frontal e inferior, coordenadas, ángulo de rotación,  
 223 dirección, etc.  
 224

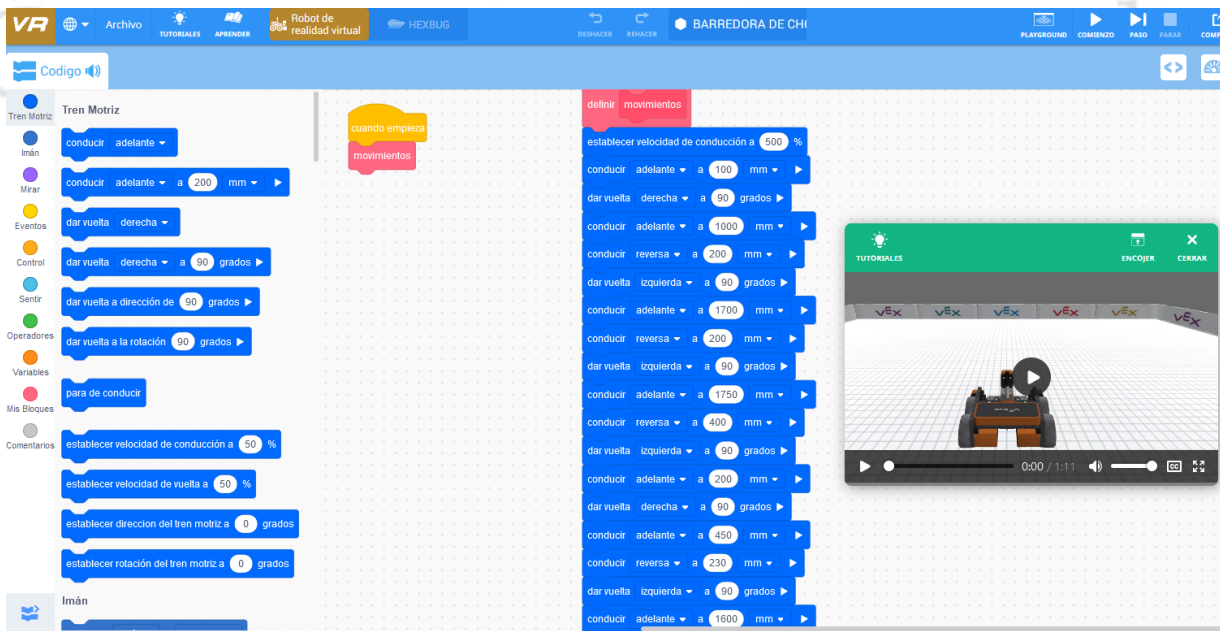


Figura 2. Entorno de trabajo VexCODO VR. Bloques de programación, programa terminado y escenario del robot

225  
 226  
 227  
 228  
 229 Por supuesto, el mismo sitio provee de tutoriales accesibles, (más de 10) y muy  
 230 efectivos para dominar la programación del robot.  
 231 Los escenarios disponibles (más de 15) presentan diversos grados de dificultad que  
 232 conllevan al usuario a echar mano de todo su conocimiento de los componentes del  
 233 robot y cómo aprovecharse de ellos para salir de un laberinto, recorrer trayectorias fijas  
 234 para derribar bloques estáticos o planear una rutina de movimiento que, más tarde o  
 235 más temprano logre derribar todos los bloques en el “terreno de juegos” cuya posición  
 236 cambia cada vez que se abre el escenario, recoger objetos, etc.  
 237

### 3. Análisis

239

240 Aprender programación y desarrollar prácticas de Robótica educativa abren facetas de  
241 ludificación a los intentos por hacer pensar a los adolescentes a nuestro cuidado en  
242 educación secundaria, los proyectos de aprendizaje basado en problemas, desarrollar  
243 la creatividad con soluciones innovadoras a problemas, desarrollar pensamiento  
244 secuencial fomentar estrategias de ordenación de pensamiento son algunas de las  
245 actividades que conlleva.

246 Se dice reiteradamente que debemos preparar a nuestras alumnas y alumnos para  
247 profesiones, oficios o empleos que aún no se requieren o todavía no se escriben los  
248 planes y programas que los desarrollen.

249 Las habilidades digitales que podemos empezar a desarrollar con estas propuestas tal  
250 vez contribuyan a disminuir el impacto planteado en Levano (2019) cuando cita a  
251 Álvarez et al (2017) al poner en evidencia que hay una distancia asincrónica en relación  
252 a universitarios hallando que existe una evidente carencia de habilidades digitales que  
253 les ha restringido la interactividad a nivel digital, por lo que han perdido oportunidades  
254 de desarrollo; así como también una sensible debilidad en el uso y aprovechamiento  
255 de los recursos digitales y tecnologías similares que les hubiese permitido gestar  
256 nuevos conocimientos más acordes con el momento y con ello restringir la creatividad  
257 e innovación.

258 Los futuros docentes experimentaron en propia piel los retos nuevos al tener que  
259 descubrir sus propios errores y perseverar en la consecución del logro, compartimentar  
260 en bloques una estrategia de solución, descubrir que mejoraron, aunque no de forma  
261 evidente ni rápida, su capacidad y habilidad en solucionar problemas. De la misma  
262 forma puede trascenderse a logros con las alumnas y los alumnos de secundaria.

263

#### 264 **4. A modo de conclusiones**

265

266 Según Pisanty (2015) las instituciones educativas deben tomar decisiones acerca de  
267 la forma, nivel de profundidad, y diversidad de opciones que pueden ofrecer para el  
268 aprendizaje de la programación. La multiplicidad de oportunidades actuales  
269 aprendizaje formal de algoritmos y lenguajes, uso de “macros” en software de uso  
270 general, robótica educativa, cultura maker, etcétera- provee riquezas nunca vista.

271 Se espera que, en ya próximas reformas a programas de Educación Normal se incluya  
272 programación no solo como asignatura optativa.

273 Mientras esto ocurre, el uso de las plataformas de libre acceso como las abordadas,  
274 constituyen herramientas poderosas para mejorar la preparación de los futuros  
275 docentes, pero principalmente para las y los colegas en servicio con ánimo de mejorar  
276 su práctica, más aún con aquellas y aquellos interesados en acercar al alumnado de  
277 secundaria herramientas atractivas que posibiliten su cercanía al perfil deseado de las  
278 y los jóvenes del siglo XXI, lo mejor alfabetizados posible, digitalmente hablando, por  
279 supuesto.

280

#### 281 **5. Índice de referencias**

282 Libros

- 283 • SEP (2018) Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas en Educación  
284 Secundaria. Plan de Estudios 2018 México 2018

285 Revistas

- 286 • Lévano, L., Sanchez, S., Guillén, P., & Tello, S., & Herrera, N., & Collantes, Z.  
287 (2019). Competencias digitales y educación. *Propósitos y Representaciones*,  
288 7(2), 569-588.  
289 doi:<http://dx.doi.org/10.20511/pyr2019.v7n2.329>  
290 • Moreno, I., & Muñoz, L., & Serracín, J., & Quintero, J., & Pittí, K. & Quiel, J.  
291 (2012). La robótica educativa, una herramienta para la enseñanza-aprendizaje  
292 de las ciencias y las tecnologías. *Revista Teoría de la Educación: Educación y*  
293 *Cultura en la Sociedad de la Información*. 13(2), 74-90 [Fecha de consulta:  
294 10/01/2022].  
295 <https://www.redalyc.org/pdf/2010/201024390005.pdf>  
296 • Pisanty, A. ¿Debe introducirse el aprendizaje de la programación de compu-  
297 tadoras en el bachillerato? **Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia**,  
298 [S.l.], v. 7, n. 14, p. 10, ago. 2015. ISSN 20074751. Disponible en: <http://revistas.unam.mx/index.php/rmbd/article/view/65245/57175>. Fecha de acceso: 22  
299 feb. 2022  
300 • Sáez, J., & Cózar, R. (2017) «Pensamiento computacional y programación vi-  
301 sual por bloques en el aula de Primaria». *Educar*, [en línea], Vol. 53, n.º 1, pp.  
302 129-46, <https://raco.cat/index.php/Educar/article/view/317274> [Consulta: 22-01-  
303 2022].  
304 • Vargas, J., & Chumpitaz, L., & Suárez, G., & Badia, A. (2014). Relación entre  
305 las competencias digitales de docentes de educación básica y el uso educativo  
306 de las tecnologías en las aulas. *Profesorado. Revista de Currículum y Forma-  
307 ción de Profesorado*, 18 (3), 361-376. [fecha de Consulta 22 de febrero de  
308 2022]. ISSN: 1138-414X.  
309 Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=56733846020>  
310 • Viegas, J., & Villalba, K., (2017). Educación y Robótica Educativa. *Revista de*  
311 *Educación a Distancia (RED)*, 17(54). Recuperado a partir de  
312 <http://revistas.unam.mx/index.php/rmbd/article/view/65245/57175>  
313 • Zavala, D. & Muñoz, K. & Lozano, E. (2016) Un enfoque de las competencias  
314 digitales de los docentes. *Revista Publicando*, Universidad Central de Ecuador  
315 págs. 3 (9), 330-340  
316

317 Información en línea

- 318 • MIT (2000), Massachusetts Institute of Technology. Scratch  
319 Disponible en <https://www.scratch.school/aprender/que-es-scratch/>  
320 Tinkercad, 20

# ESTRATEGIAS Y TÉCNICAS EN LOS CURSOS DE MATEMÁTICAS DE BACHILLERES EN MODALIDAD VIRTUAL

Lujambio Chávez Mariana<sup>\*1</sup>, Dulce Gabriela Rivera Sánchez<sup>2</sup> y Noemí Gabriela Lara Sáenz<sup>3</sup>  
*Universidad Autónoma de Querétaro. Escuela de Bachilleres, Plantel Sur. Cto. Moisés Solana, zona dos extendida, Balaustradas, 76070*  
**ID- POSM052**

## Resumen

La didáctica de las matemáticas engloba las estrategias y técnicas a utilizar por los docentes para analizar, mejorar, plantear, construir, fundamentar, planear, las prácticas de enseñanza aprendizaje que lleven a los estudiantes a apropiarse de los conocimientos esperados, de tal manera que es importante considerar que existen diferentes caminos por tomar considerando el contexto de los estudiantes, la cultura, el currículo y las normas dando énfasis en lo complicado de la tarea y por tanto en la importancia de la formación docente. La nueva normalidad ha influido considerablemente en el uso de estrategias y técnicas anteriormente no conocidas ni dominadas, asociadas con las TIC, que los docentes han adecuado de acuerdo a su experiencia y cursos de formación. En el presente trabajo se expone la experiencia de docentes de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro en los cursos virtuales de Geometría Euclidiana, Geometría Analítica y Cálculo después de reflexionar sobre su práctica y hacer adecuaciones de la modalidad presencial a la virtual.

**Palabras clave:** estrategias, técnicas, formación docente, modalidad virtual.

## 1. Introducción

A partir del confinamiento ocasionado por el covid-19, los docentes nos vimos en la necesidad de migrar a la modalidad virtual, siendo este un cambio no esperado, uno de los principales factores para tener éxito y adecuar los cursos de matemáticas fue la formación docente a través de cursos que proporcionaran las herramientas adecuadas para la adaptación de la modalidad. Por tal motivo la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro proporcionó a través del programa de formación docente los cursos:

**Tabla 1. Cursos didáctico pedagógicos de formación docente impartidos por la EBA-UAQ**

Nombre del curso	Fecha de inicio	Duración
Instrumentos de evaluación	10/01/2022	50 hrs
Reflexión didáctica en la aplicación de estrategias de enseñanza	03/09/2021	25 hrs
Estrategias Didácticas para la Enseñanza y Evaluación Virtual	19/07/2021	30 hrs

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: mariana.lujambio@uaq.mx

Aplicación de técnicas de estudio como estrategias de aprendizajes	11/03/2021	40 hrs
Desarrollo de competencias digitales docentes para enfrentar el Aula Virtual	12/02/2021	25 hrs

38

39 Los cursos fueron aprovechados por docentes de todas las materias, sin embargo,  
40 muchos de los aprendizajes adquiridos fueron parte del rediseño del proceso  
41 enseñanza aprendizaje para los cursos virtuales de las materias de Matemáticas III.  
42 Geometría Euclidiana y Trigonometría, Matemáticas IV. Geometría Analítica y  
43 Matemáticas V. Cálculo diferencia e integral.

44 Como mencionan Henao y Zapata (2002) “Transformar los contenidos de un curso  
45 presencial para que pueda utilizarse en un entorno virtual es una tarea compleja y larga  
46 que exige a los docentes aprender nuevas habilidades tecnológicas, otras formas de  
47 organizar contenidos, e, incluso, un nuevo estilo de enseñanza” pp.46 . Por lo que es  
48 importante tomar en cuenta las estrategias y técnicas existentes y que sean accesibles  
49 para los docentes.

50 Valverde y Solis (2021) mencionan la preferencia que tienen los estudiantes por las  
51 clases presenciales, a diferencia de las virtuales, debido a la necesidad de un guía que  
52 simplifique los conocimientos y responda a sus dudas. Sin embargo, esta modalidad  
53 de educación implica más retos para los docentes, los cuales deben prepararse y  
54 utilizar estrategias para hacer lo más dinámica y didáctica posible su clase, de tal forma  
55 que sea motivadora.

56 En este contexto, las Tic toman un papel primordial, y es importante la formación  
57 docente para poder implementarlas en clase presencial o virtual. Su uso también  
58 requiere la preparación de los estudiantes, los cuales deben reflejar competencias  
59 adecuadas.

60 Por otro lado, Valverde y Solis (2021) mencionan la importancia de la interacción entre  
61 docente y estudiantes, donde se refleje el seguimiento y acompañamiento de las  
62 tareas, así como la retroalimentación y evaluación, siempre actuando con empatía, la  
63 cual debe ser una cualidad del docente. El entendimiento de la generación, así como  
64 sus comportamientos también toman un papel primordial, ya que, normalmente los  
65 estudiantes buscan aprender de una forma divertida y adecuada a su contexto.

66 A su vez Valverde y Solis (2021) definen la estrategia de enseñanza como las  
67 técnicas, procesos, recursos, procedimientos, etc. aplicados por el docente y que  
68 facilitan el aprendizaje del estudiante de acuerdo a su contexto. Dichas estrategias  
69 están influenciadas por la cultura y entorno del docente, así como sus propios  
70 conocimientos en didáctica.

71 Díaz (1999) define a las estrategias de enseñanza como los procedimientos o recursos  
72 utilizados por el agente de enseñanza para promover aprendizajes significativos.

73 La investigación de estrategias de enseñanza ha abordado aspectos como: diseño y  
74 empleo de objetivos e intenciones de enseñanza, preguntas insertadas, ilustraciones,  
75 modos de respuesta, organizadores anticipados, redes semánticas, mapas  
76 conceptuales y esquemas de estructuración de textos, entre otros. Díaz (1999)

77 La investigación en estrategias de aprendizaje se ha enfocado en el campo del  
 78 denominado aprendizaje estratégico, a través del diseño de modelos de intervención  
 79 cuyo propósito es dotar a los alumnos de estrategias efectivas para el mejoramiento  
 80 en áreas y dominios determinados.

81 Las principales estrategias de enseñanza son las siguientes:

82 **Tabla 2. Estrategias de enseñanza obtenidas de la literatura**

Objetivos:	Enunciado que establece condiciones, tipo de actividad y forma de evaluación del aprendizaje del alumno, generación de expectativas apropiadas en los alumnos.
Resumen:	Síntesis y abstracción de la información relevante de un discurso oral o escrito
Organizador previo:	Información de tipo introductorio y contextual. Es elaborado con un nivel superior de abstracción, generalidad e exclusividad que la información que se aprenderá
Ilustraciones:	Representación visual de los conceptos, objetos o situaciones de una teoría o tema específico
Analogías:	Proposición que indica que una cosa o evento (concreto y familiar) es semejante a otro (desconocido y abstracto o complejo).
Preguntas intercaladas:	Preguntas insertadas en la situación de enseñanza o en un texto.
Pistas topográficas y discursivas:	Señalamientos que se hacen en un texto o en la situación de enseñanza para enfatizar y/u organizar elementos relevantes del contenido por aprender.
Mapas conceptuales y redes semánticas	Representación gráfica de esquemas de conocimiento (indican conceptos, proposiciones y explicaciones).
Uso de estructuras textuales:	Organizaciones retóricas de un discurso oral o escrito, que influyen en su comprensión y recuerdo.

83  
 84 Diversas estrategias de enseñanza pueden incluirse antes (pre instruccionales),  
 85 durante (co instruccionales) o después (pos instruccionales) de un contenido curricular  
 86 específico, ya sea en un texto o en la dinámica del trabajo docente.

87 Las estrategias pre instruccionales por lo general preparan y alertan al estudiante en  
 88 relación a qué y cómo va a aprender

89 Las estrategias co instruccionales apoyan los contenidos curriculares durante el  
 90 proceso mismo de enseñanza o de la lectura del texto de enseñanza.

91 Las estrategias pos instruccionales se presentan después del contenido que se ha de  
 92 aprender y permiten al alumno formar una visión sintética, integradora e incluso crítica  
 93 del material.

94  
 95  
 96

97 Por último se clasifican y mencionan en el texto las siguientes estrategias:  
98 Estrategias para activar (o generar) conocimientos previos y para establecer  
99 expectativas adecuadas en los alumnos: Son aquellas estrategias dirigidas a activar  
100 los conocimientos previos de los alumnos o incluso a generarlos cuando no existan  
101 Estrategias para orientar la atención de los alumnos: Son aquellos recursos que el  
102 profesor o el diseñador utiliza para focalizar y mantener la atención de los aprendices  
103 durante una sesión, discurso o texto.  
104 Estrategias para organizar la información que se ha de aprender: Permiten dar mayor  
105 contexto organizativo a la información nueva que se aprenderá al representarla en  
106 forma gráfica o escrita.  
107 Estrategias para promover el enlace entre los conocimientos previos y la nueva  
108 información que se ha de aprender: Son aquellas destinadas a crear o potenciar  
109 enlaces adecuados entre los conocimientos previos y la información nueva que ha de  
110 aprenderse, asegurando con ello una mayor significatividad de los aprendizajes  
111 logrados.  
112 Por su parte se resalta la idea de que "Las estrategias de enseñanza virtual señalan  
113 como principal labor del docente, el acompañamiento continuo a cada uno de sus  
114 estudiantes en el cumplimiento de los logros de aprendizaje, siendo la consecuencia  
115 de una buena interacción y comunicación entre el docente y el estudiante" (Valverde y  
116 Solís, 2021, pp. 1117).  
117 Tal como concluyen Jiménez y Robles (2016) "las estrategias didácticas deben tener  
118 en consideración al estudiante como un ser activo y crítico en la construcción de su  
119 conocimiento, la necesidad de atender a sus diferencias individuales de aprendizaje,  
120 así como la conveniencia de favorecer su desarrollo personal, ello, exige al profesional  
121 docente el dominio de teorías y estrategias didácticas básicas que le permitan afrontar  
122 con ciertas garantías de éxito los grandes desafíos educativos que se plantean en este  
123 nuevo escenario universitario" pp. 112.  
124 Por otra parte las técnicas de estudio forman parte de las estrategias de aprendizaje y  
125 son aquellos métodos, procedimientos, herramientas que los estudiantes pueden  
126 utilizar para facilitar la adquisición de los conocimientos.  
127 En el presente trabajo se expondrán algunas de las técnicas y estrategias adquiridas  
128 en dichos cursos y una reflexión sobre su implementación en las de materias de  
129 matemáticas.

130

## 131 **2. Metodología o desarrollo**

132

### 133 **2.1 Contexto**

134 En la Escuela de Bachilleres se imparten seis cursos de matemáticas, uno por cada  
135 semestre, las docentes que participan en la presente experiencia didáctica imparten  
136 los cursos de matemáticas I. Álgebra, Matemáticas II Álgebra, Matemáticas III  
137 Geometría Euclidiana y Trigonometría, Matemáticas IV Geometría Analítica,  
138 Matemáticas V Cálculo diferencial e Integral y Matemáticas VI Probabilidad y  
139 estadística. Aunque las estrategias y técnicas implementadas en los cursos son muy  
140 similares, cada materia se presta a diferentes métodos formas por las características  
141 propias de la materia, es por esto que en presente trabajo nos limitaremos a exponer



142 la reflexión sobre las materias de Matemáticas III, IV y V que por el contenido se  
 143 asemejan más en la forma de enseñarse.  
 144 Las estrategias y técnicas que aquí se exponen fueron implementadas durante los  
 145 semestres 2021-1 y 2021-2 en 8 grupos, teniendo un total de 456 estudiantes  
 146 involucrados en la experiencia didáctica.  
 147 **2.2 Estrategias de enseñanza y aprendizaje**  
 148 Existen diferentes clasificaciones de las estrategias virtuales, sin embargo, se resumen  
 149 a cuestiones similares y tienen un objetivo en común. En cuanto a los recursos se  
 150 tienen plataformas de acceso libre con diferentes usos y objetivos, desde presentación  
 151 de información, desarrollar técnicas de estudio, o realizar exámenes, hasta juegos  
 152 divertidos.  
 153 En las materias anteriormente mencionadas se trabaja de una forma organizada y  
 154 estructurada para abordar temas por semana, de tal forma que el estudiante debe  
 155 entregar una evidencia de estudio, realizar actividades en clase virtual y  
 156 posteriormente entregar una actividad final que debe alojarse en la plataforma de  
 157 Moodle de la UAQ conocida como el campus virtual. Para organizar esto cada inicio  
 158 de semana los estudiantes descargan una planeación semanal como se muestra en la  
 159 siguiente imagen:



Bienvenid@s a la **TERCERA semana del PRIMER parcial** de Matemáticas IV modalidad virtual, las acciones de la semana son:

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
<input type="checkbox"/> CLASE: DESCARGAR Y LEER MATERIAL DE ESTUDIO pp.1 a 8 "3_TerceraSemana_PrimerParcial_Mate4". VER VIDEO: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=Vv3KINeAAA">https://www.youtube.com/watch?v=Vv3KINeAAA</a> <input type="checkbox"/> HACER UN CUADRO COMPARATIVO ENTRE LAS CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD COMO EVIDENCIA DE ESTUDIO.	<input type="checkbox"/> CLASE: ENTRAR A SESIÓN ZOOM EN EL HORARIO 9:20 Grupo 8 10:10 Grupo 9 16:40 Grupo 10 <input type="checkbox"/> TAREA: LEER PP. 9-15. ESCRIBIR LAS FÓRMULAS EN EL FÓRMULARIO. <input type="checkbox"/> SUBIR EVIDENCIA DE ESTUDIO Y EL FORMULARIO DE LO QUE VA DEL CURSO A LA SIGUIENTE LIGA: <a href="https://forms.gle/WVXiaC0L4G7BwDwE8">https://forms.gle/WVXiaC0L4G7BwDwE8</a> <input type="checkbox"/> LÍMITE 23:00 HRS	<input type="checkbox"/> CLASE: ENTRAR A SESIÓN ZOOM EN EQUIPOS EN EL HORARIO 9:00 Grupo 8 10:00 Grupo 9 16:30 Grupo 10 <input type="checkbox"/> HACER ACTIVIDAD EJERCICIOS 1,2,3. <input type="checkbox"/> TAREA: SUBIR INDIVIDUALMENTE CAPTURA DE CLASE Y CONTESTAR DIARIO DE CLASE EN EL LINK: <a href="https://forms.gle/qj7dktJ8nMfnNQA">https://forms.gle/qj7dktJ8nMfnNQA</a>	<input type="checkbox"/> CLASE: ENTRAR A SESIÓN ZOOM EN EL HORARIO 9:20 Grupo 8 10:10 Grupo 9 16:40 Grupo 10	<input type="checkbox"/> CLASE: ENTRAR A SESIÓN ZOOM EN EQUIPOS EN EL HORARIO 9:00 Grupo 8 10:00 Grupo 9 16:30 Grupo 10 <input type="checkbox"/> HACER ACTIVIDAD EJERCICIOS 4,5. <input type="checkbox"/> TAREA: SUBIR INDIVIDUALMENTE CAPTURA DE CLASE Y CONTESTAR DIARIO DE CLASE EN EL LINK: <a href="https://forms.gle/qj7dktJ8nMfnNQA">https://forms.gle/qj7dktJ8nMfnNQA</a> <input type="checkbox"/> TAREA: SUBIR ACTIVIDAD LÍMITE 23:00 HRS

NOTAS ADICIONALES: SE PUNTUAL EN LA ELABORACIÓN DE TUS ACTIVIDADES.

1. PARA SABER COMO ES UN CUADRO COMPARATIVO VE EL VIDEO: <https://www.youtube.com/watch?v=X6mv8IGA-hE>
2. ESTA SEMANA NO DEBES REALIZAR QUIZ, LA PRÓXIMA SEMANA SE INCLUIRAN PREGUNTAS DE ESTA SEMANA.
3. LEER LOS LINEAMIENTOS DE ENTREGA DE ACTIVIDADES, EL INCUMPLIMIENTO DE LAS MISMAS BAJARÁ PUNTOS.  
<https://drive.google.com/file/d/1IIGQTJcyKoppeBFpyRBepCINfrNZ4vT3/view?usp=sharing>
4. SI TIENES DUDAS COMUNICATE POR MSN DE LA PÁGINA DE FACEBOOK mateyfisica. O AL CORREO: [mariana.lujambio@uaq.mx](mailto:mariana.lujambio@uaq.mx)

160  
 161  
 162  
 163  
 164

**Figura 1. Planeación semanal.**

Cada día el estudiante debe realizar diferentes acciones y como guía puede ir palomeando aquellas que va realizando. Lo cual sirve como una estrategia preinstruccional.

165 2.4 Técnicas implementadas como evidencias de estudio.

166 Cada semana los estudiantes acceden al documento de estudio y realizan una  
167 evidencia de estudio, la cual consiste en realizar una técnica de estudio que puede  
168 ser: subrayar, resumir, cuadro comparativo, cuadro sinóptico, mapa mental,  
169 cuestionario, formulario, fichas de estudio, hoja de cornell, lluvia de ideas etc. Primero  
170 se dio información al grupo sobre el tema a trabajar con dicha técnica, posteriormente  
171 se le detallo en qué consistía la técnica y por último se solicitó por medio de un  
172 formulario google la evidencia de haber realizado la técnica, las cuales se fueron  
173 subiendo al virtual UAQ en el transcurso de la toma del curso.

174 Los estudiantes en todo momento trabajaron sus técnicas de forma individual y sola-  
175 mente los cuestionarios fueron utilizados para hacer una actividad grupal en donde las  
176 preguntas más destacadas fueron trabajadas con todo el grupo por medio de un kahoot  
177 y un Quiz. La razón por la que se pidieron individuales es porque la virtualidad complica  
178 el trabajo en equipo y promueve la participación de tareas que al final de cuentas sigue  
179 siendo una participación individualista. Además las técnicas fueron empleadas como  
180 recurso para que el alumno se introdujera y repasara el tema proporcionado semanal-  
181 mente, por lo que es necesario que cada alumno en la individualidad profundice a su  
182 ritmo y modo en el tema.

183 Los organizadores previos es una de las estrategias más se utilizó para los conceptos  
184 teóricos que son importantes para la comprensión de la misma, muchas veces es  
185 tedioso para los estudiantes aprender con prácticas memorísticas, por lo que se  
186 sugieren técnicas de estudio como pomodoro para la realización de organizadores de  
187 la información que después les sean útiles para e repaso de un tema. La organización  
188 de la información debe ser variada, mostrando diferentes estrategias para organizar  
189 información nueva, como son: mapas conceptuales, cuadros sinópticos, líneas el  
190 tiempo, mapas mentales etc. Con el mismo objetivo se deben implementar en la clase  
191 estrategias de diseño de textos como: subrayado, preguntas y resúmenes.

192 Por último la estrategia con más éxito en las clases son las estrategias para promover  
193 la enseñanza situada, que aunque requieren de un mayor nivel cognitivo, normalmente  
194 motivan más a los estudiantes.

195 2.3 Recursos virtuales estratégicos.

196 Los recursos virtuales que se han implementado y forman parte de la estrategia en los  
197 cursos de matemáticas son:

- 198 • La utilización de la plataforma zoom para las sesiones sincrónicas.
- 199 • El uso de la plataforma kahoot, wordwall, durante la sesiones sincrónicas.
- 200 • El uso de youtube.
- 201 • El uso de quiz o exámenes rápidos por medio de las plataformas: quizzis,  
202 formularios google, formative, nearpod.
- 203 • El uso de plataformas como canva y geneally para generar infografías u  
204 organizadores gráficos.
- 205 • El uso de pizarras virtuales como Idroo y Jamboard.
- 206 • El uso de creación de videos con flipgrid
- 207 • El uso de redes sociales: Facebook, tiktok, Instagram.

- 208 • El uso de medios de comunicación WhatsApp, correo electrónico, Messenger  
209 • El uso del campus virtual UAQ.

#### 210 2.4 Proyectos como estrategia de evaluación

211 Consideramos que en la modalidad virtual los exámenes pueden ser poco factibles  
212 para evaluar. Cada parcial se entrega los lineamientos de una tarea con mayor nivel  
213 cognitivo y que pone a prueba las competencias y creatividad de los estudiantes,  
214 además de la colaboración en equipo. Los proyectos realizados requieren del uso de  
215 la tecnología y de conocimientos de otras materias lo que los hace multidisciplinarios.

216

217

### 218 3. Resultados y análisis

219 Las estrategias mencionadas anteriormente son producto de la experiencia de varios  
220 años, los meses de confinamiento, pero sobre todo la reflexión crítica de los  
221 estudiantes, autocrítica e ideas comentadas en trabajo colegiado.

222 A pesar de que todas las técnicas y estrategias implementadas durante el curso se  
223 pueden aplicar a los contenidos de matemáticas, hay algunas más adecuadas  
224 dependiendo del momento y el contenido. Por ejemplo en la virtualidad considero  
225 complicado aplicar la técnica de lluvia de ideas o problemas aplicados pues requieren  
226 de más tiempo y una retroalimentación certera del profesor para no confundir a los  
227 estudiantes.

228 En el caso de matemáticas, dependiendo de cuál sea el tema hay algunas técnicas  
229 como el mapa mental que no es muy factible aplicar. También dependiendo de la  
230 materia es la factibilidad para aplicar estas técnicas, se trabajó con estudiantes de  
231 distintas materias de tal forma que la diversidad de temas es bastante amplia por lo  
232 que permitió aplicar casi todas las técnicas de forma satisfactoria.

233 Los cursos impartidos por el programa de formación docente fueron bien  
234 aprovechados puesto que nos dio conocimientos sobre el uso e implementación de  
235 técnicas y estrategias que no se utilizaban antes y ahora se han incluido en la práctica  
236 docente. Desde el inicio de la pandemia se ha recurrido a la entrega de evidencias de  
237 estudio del documento, las cuales tienen un valor significativo en la calificación de los  
238 estudiantes, antes de los cursos de formación se limitaba a pedir resúmenes y  
239 esquemas gráficos, sin embargo, los cursos han complementado las opciones.

240 Las dificultades generales que se pueden presentar es que los estudiantes  
241 desconozcan o no comprendan como llevar a cabo alguna técnica o la confundan con  
242 otra técnica (algo muy común con el mapa mental y conceptual). Sin embargo, esto se  
243 puede trabajar dando una plática al inicio del curso, mostrando ejemplos y dando las  
244 instrucciones de lo solicitado lo más claras posibles.

245 Las ventajas al aplicar las técnicas y estrategias descritas es que se consideran las  
246 capacidades y formas de aprender de cada estudiante, pues no todos son iguales,  
247 algunos son más lógicos, otros más prácticos, otros más visuales, a algunos se les  
248 facilita la visualización y por tanto prefieren los organizadores gráficos. Al tener un  
249 abanico de posibilidades por utilizar, estamos siendo más flexibles a todos los tipos de  
250 aprendizaje.

251

252

253 **4. Conclusiones**

254 En conclusión, no hay una única forma de enseñar matemáticas y eso nos lleva a  
255 preguntarnos constantemente si la forma que hemos adoptado es la más apropiada  
256 en nuestro contexto. Sin embargo, es muy importante la mejora continua a través de  
257 la reflexión didáctica, y sobre todo el reconocimiento de las necesidades de nuestros  
258 estudiantes, así como la capacitación práctica y teórica que como docentes nos sirve  
259 como actualización.

260

261 **5. Índice de referencias (Obligatorio)**

262 Libros

- 263 • Diaz, F. (1999). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una  
264 interpretación constructivista. McGraw-Hill. México. Cap. 4 y 5  
265 • Henao, O., Zapata D.(2002) La enseñanza virtual en la educación superior.  
266 ICFES. Colombia.

267 Revistas

- 268 • Valverde, A., Solis, B. (2021) Estrategias de enseñanza virtual en la educación  
269 superior. Polo del Conocimiento. 6(1)  
270 • Jiménez, A. Robles, F. (2016) Las estrategias didácticas y su papel en el desa-  
271 rrollo del proceso de enseñanza aprendizaje. Revista EDUCATECONCIENCIA.  
272 9(10)

273

274

# PROYECTOS DE ESTADÍSTICA PARA REFLEXIONAR SOBRE LA RESILIENCIA EN TIEMPO DE PANDEMIA

Lujambio Chávez Mariana<sup>1\*</sup>, Dulce Gabriela Rivera Sánchez<sup>2</sup> y Noemí Gabriela Lara Sáenz<sup>3</sup>  
*Universidad Autónoma de Querétaro. Escuela de Bachilleres, Plantel Sur. Cto. Moisés Solana, zona dos extendida, Balaustradas, 76070*

AP- POSM054

## Resumen

*El confinamiento por COVID no solo pone a prueba la forma de aprender y enseñar, también las habilidades emocionales y afectivas de los estudiantes, los cuales, en plena adolescencia deben mantener un buen balance físico emocional y mental. La materia de estadística se puede adaptar al contexto de los estudiantes permitiendo la aplicación de lo aprendido en clase en temas de su interés a través de proyectos. . Batanero y Díaz (2011) como referencia de la enseñanza de la estadística con proyectos mencionan que es importante fomentar el razonamiento estadístico integrando el aprendizaje de la estadística con pequeñas investigaciones o proyectos. El presente trabajo resume una experiencia didáctica en torno al uso de la estadística para el análisis de presentación de datos sobre el tema: la importancia de la resiliencia, en el marco del día del bienestar de la Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro.*

**Palabras clave:** proyectos, estadística, contexto, resiliencia, confinamiento, datos.

## 1. Introducción

La Estadística nos permite obtener información importante sobre un tema de interés para posteriormente presentarlo de forma amigable para el lector y así llegar a la reflexión. Por lo cual es adaptable al contexto de los estudiantes para ser presentada a través de proyectos. Batanero y Díaz (2011) como referencia de la enseñanza de la estadística con proyectos mencionan la importancia de fomentar el razonamiento estadístico integrando el aprendizaje de la estadística con pequeñas investigaciones o proyectos. La enseñanza de la estadística con proyectos se ha fundamentado en la idea de permitir una participación activa y motivada por parte de los estudiantes, además de trabajar con datos que los alumnos puedan comprender de acuerdo a su sentido numérico y que sean más cercanos a su realidad. La crisis provocada por el confinamiento en los últimos años ha modificado por completo muchos ámbitos y aspectos de nuestra vida, incluidas la forma en que nos vemos a nosotros mismos y a los otros, la forma en que interactuamos, la educación, el trabajo, la economía, etc. etc. Lo cual pone a prueba nuestras habilidades emocionales, cognoscitivas y socio afectivas. La pandemia por COVID 19 ha obligado, a nivel individual, familiar, grupal y colectivo, a desarrollar y/o poner en práctica destrezas y capacidades para mantener nuestro balance físico, emocional y mental, además las circunstancias nos obligan a

<sup>1</sup>Autor para la correspondencia. E-mail: mariana.lujambio@uaq.mx

44 reflexionar sobre el futuro, lo cual puede provocar ansiedad, así como a vislumbrar  
45 cambios en el funcionamiento familiar, social y económico una vez pasen los periodos  
46 críticos del aislamiento (OPS, 2020).

47 A lo largo de la pandemia, se han observado con mucha frecuencia momentos de  
48 angustia, dolor, depresión y caos; debiendo buscar herramientas para afrontar lo que  
49 ocurre a nuestro alrededor y en nuestro interior de manera resiliente.

50

51 “La resiliencia es la capacidad del ser humano para hacer frente a las adversidades  
52 de la vida, aprender de ellas, superarlas e inclusive, ser transformados por estas”.  
53 (Grotberg, 2006).

54

55 Lo anterior hace necesario pensar en nuestra comunidad educativa, en encontrar  
56 maneras de fomentar bienestar y equilibrio entre, sobre todo por la etapa adolescente,  
57 por lo tanto, se resalta la importancia de formarlos de forma interdisciplinaria, de tal  
58 forma que la matemática también les proporcione herramientas para cuidar su salud  
59 mental, superar lo que se vaya presentando y adaptarse, de manera resiliente. “*Todas  
60 las personas tienen algo de resiliencia y todas pueden promover la resiliencia en  
61 cuanto que son responsables de otros y pertenecen al entorno de los demás*”  
62 (Castagnola, 2021).

63

64 Actualmente los estudiantes de la EBA-UAQ están pasando por un proceso único  
65 provocado por el confinamiento por lo que reflexionar sobre el tema de la resiliencia a  
66 través de la estadística es parte de su formación. En este trabajo se muestra una  
67 experiencia didáctica donde los alumnos de sexto semestre se darán a la tarea de  
68 investigar y presentar su investigación a la comunidad estudiantil para invitar a los  
69 grupos participantes a realizar opiniones al respecto en un foro de participación.

70 Un proyecto es tan complejo y completo como una investigación, es por ello que la  
71 preparación que debe tener el docente para motivar a los alumnos y lo lleven a cabo  
72 es extensa. En principio el docente debe estar preparado para reconocer si las  
73 variables, objetivos e hipótesis que están proponiendo los estudiantes son factibles  
74 para sus objetivos de aprendizajes y encaminarlos correctamente. Posteriormente  
75 debe reconocer que la evaluación debe ser objetiva y con diversos instrumentos.

76 Realizar un proyecto no debe limitarse a realizar solo una serie de pasos como cuando  
77 se obtiene la solución de un problema identificando datos y fórmulas; sin embargo, se  
78 puede realizar de forma sistemática y ordenada como Batanero y Díaz (2011) proponen:  
79 comenzar con el planteamiento del problema, plantear preguntas, recoger datos,  
80 organizar, analizar e interpretar los datos, resolver el problema y escribir un informe.

81 La presente experiencia didáctica tiene como objetivos:

82 Informar a la comunidad estudiantil por medio de infografías interactivas sobre las  
83 medidas de resiliencia, control de emociones, retos y dificultades, aprendizajes y  
84 mejoras de los estudiantes durante la pandemia.

85 Aplicar los conocimientos vistos hasta ahora en la clase de Matemáticas VI para  
86 recolectar datos de los estudiantes del plantel sur aplicando encuestas.

87 Presentar los datos de una forma amigable utilizando una infografía interactiva.

88 Desarrollar competencias genéricas y disciplinares propuestas en la planeación de la  
89 materia asociadas al desarrollo de habilidades socioemocionales: Toma responsable  
90 de decisiones, autorregulación, conciencia de sí mismos.

91  
92  
93

## 94 **2. Metodología o desarrollo**

95

### 96 **2.1 Contexto**

97 La materia de Matemáticas VI del plan curricular de la Escuela de Bachilleres contiene  
98 los temas de estadística: Presentación y análisis de datos. Los estudiantes que cursan  
99 esta materia son de sexto semestre por lo que tienen edades de 17 a 18 años. En la  
100 presente experiencia didáctica participaron 90 estudiantes correspondiente a dos  
101 grupos de sexto semestre y una comunidad de aproximadamente 1250 estudiantes  
102 entre 15 y 18 años como población del plantel sur lo cuales fueron entrevistados para  
103 las investigaciones correspondientes a los proyectos. El ciclo escolar evaluado  
104 corresponde al semestre 2022-1, específicamente la investigación se llevó a cabo  
105 durante el primer parcial.

106

107 Actualmente toda la comunidad estudiantil continúa cursando las clases en la  
108 modalidad virtual, las cuáles comenzaron a mediados de Marzo del 2020.

109 A casi dos años del confinamiento los estudiantes han reportado tanto en sus tutorías  
110 grupales como individuales tener problemas de estrés, ansiedad, depresión etc. lo que  
111 ha incrementado en gran medida las solicitudes de atención al Programa de  
112 Orientación Educativa (POE), el cual cuenta con servicios de psicología, nutrición,  
113 salud, y atención a víctimas de violencia de género.

114

115 Es por ello que, en la edición del Día de Bienestar del semestre 2022-1, se optó por  
116 proponer lo siguiente:

117 Tema: “reSURgiendo: La importancia de la resiliencia” Lema: “En medio de la  
118 dificultad, reside la oportunidad” (Albert Einstein)

119 Cuyo objetivo general es brindar a nuestros estudiantes formación e información que  
120 los dote de estrategias y herramientas encaminadas a fomentar la resiliencia,  
121 minimizando conductas de riesgo y generando alternativas que impacten  
122 favorablemente en su vida escolar, familiar, social y emocional.

123

124 El día del bienestar se realiza cada semestre, donde profesores y estudiantes  
125 reflexionan sobre algún tema relevante para su desarrollo, propuesto por el POE.

126 El evento da la oportunidad de mostrar a la comunidad proyectos multidisciplinarios  
127 asociados a cada una de las materias. En el caso de la materia de matemáticas VI se  
128 presenta a continuación la propuesta realizada.

129

### 130 **2.2 Desarrollo del Proyecto**

131

132 La primera unidad de la materia Matemáticas VI: Probabilidad y Estadística contiene  
 133 los temas de Recolección y presentación de datos, por lo que se plantea a los  
 134 estudiantes una actividad semanal asociada al tema de la materia para ir desarrollando  
 135 el proyecto a presentar en el día del bienestar. El proyecto inicia desde la primera  
 136 semana de clases del 17 al 21 de Enero y termina con la presentación en el día del  
 137 bienestar el 18 de Febrero.

138

139 A continuación, se presenta un cronograma:

140

**Tabla 1. Cronograma del proyecto a realizar.**

Actividad	Fecha de entrega	Entregable
Armar equipos. Definir un líder o encargado de equipo que registre a todo el equipo y haga una sesión zoom recurrente en la cual se reunirán.	21 de Enero	Formulario de registro de equipo
Leer artículos acerca de la residencia en tiempos de pandemia. Reflexionar del tema y pensar en todas las variables involucradas. Plantear 4 preguntas que ayuden a alcanzar su objetivo, de las cuales: una corresponda a variable cuantitativa continua, una a variable cuantitativa discreta, una a variable cualitativa nominal y una a variable cualitativa ordinal. Realizar un reporte. Una vez aprobada la encuesta, reescribirla en formularios google. Pide como información semestre, grupo y nombre para identificar que los encuestados no sean falsos ni repetidos.	28 de Enero	Reporte Encuesta realizada en formularios google
Aplicar la encuesta al menos a 100 estudiantes de la EBA-UAQ, plantel sur. Descargar el archivo de Excel que genera formularios google con los datos de la encuesta. Realizar de cuatro a cinco tablas de distribución de frecuencia (una por cada variable encuestada).	4 de Febrero	Archivo de Excel con los datos de la encuesta, Tablas de distribución de frecuencia
Para las tablas de frecuencias de variables cuantitativas (continuas y discretas) obtener las medidas estadísticas: Media, Mediana, Moda, Sesgo, Varianza, Desviación estándar, Rango. Interpretar las medidas estadísticas.	11 de Febrero	Cálculos e interpretaciones de las medidas estadísticas (de al menos dos variables)
Realizar al menos 4 gráficas. Con toda la información recabada y el análisis de datos presentar en una infografía	18 de Febrero	Infografía de Genially



de Genially en un foro de Facebook programado para interactuar el día del bienestar.	Día del Bienestar	Foro de Facebook
--	-------------------	------------------

141

142

## 2. Resultados y análisis

143

144 Con el proyecto se espera que los estudiantes de sexto semestre hagan una  
145 investigación sobre la situación actual de los estudiantes de la prepa sur en un contexto  
146 de confinamiento, ¿cómo han sido afectados en su salud mental?, ¿Cuáles han sido  
147 sus retos y la forma de sobrellevarlos? Y sobre todo ¿cómo puede superarse la  
148 situación a través de la resiliencia? Esto a través de las herramientas y conocimientos  
149 adquiridos en la materia de matemáticas VI.

150

151 Además, se espera que con los proyectos, los estudiantes de sexto semestre  
152 desarrollen más competencias digitales al solicitarles el uso de formularios google,  
153 Excel y genially.

154

155 También se espera que toda la comunidad involucrada en el proyecto haga una  
156 reflexión a través de los datos mostrados que les dé un panorama actual de la situación  
157 y sobre todo se sientan acompañados en este proceso, así como soliciten la ayuda  
158 adecuada.

159

## 4. Conclusiones

160

161 La pandemia provocada por el Covid-19 ha traído consigo nuevas formas de  
162 enseñanza de las matemáticas, donde además de desarrollar los conocimientos  
163 solicitados en el currículo, es necesario no dejar de lado el contexto de los estudiantes,  
164 el cual está siendo cada vez más complicado y abrumador. El desarrollo de  
165 competencias matemáticas es muy importante para la formación de los estudiantes,  
166 sin embargo, también debemos enfocarnos en desarrollar las habilidades  
167 socioemocionales y es por eso que en esta experiencia didáctica se considera el uso  
168 de la estadística para tratar el tema de la resiliencia dentro del programa de las  
169 actividades del día del bienestar que la Escuela de Bachilleres de la Universidad  
170 Autónoma de Querétaro tiene a bien organizar.

171

## 5. Agradecimientos

172

173 Los autores agradecemos al Programa de Orientación Educativa (POE) de la Escuela  
174 de Bachilleres por la organización del día del bienestar.

175

176

177

178

179

180

## 181 **6. Índice de referencias**

### 182 Libros

- 183 • Batanero, C. y Díaz, C. (2011). Estadística con proyectos; Granada, España:  
184 ReproDigital. Recuperado de:  
185 <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf>  
186 • Grotberg H. E. Comp. (2006). La resiliencia en el mundo de hoy. Cómo superar  
187 las adversidades. Barcelona, Editorial Gedisa.

### 188 Información en línea

- 189 • OPS (2020). Resiliencia en tiempos de pandemia. Claves para fortalecer los  
190 recursos psicológicos en el aislamiento y distanciamiento social. [En línea]  
191 Disponible en: <https://www.paho.org/es/documentos/resiliencia-tiempos-pandemia>  
192  
193 • Castagnola, C., Carlos-Cotrina, J., & Aguinaga-Villegas, D. (2021). La  
194 resiliencia como factor fundamental en tiempos de Covid-19. Propósitos y  
195 Representaciones, 9 (1), e1044. Doi:  
196 <http://dx.doi.org/10.20511/pyr2021.v9n1.1044>

# LEY DE GAUSS PARA CAMPOS ELÉCTRICOS: EXPERIMENTO EN PANDEMIA

Pedro Guzmán Tinajero<sup>1\*</sup>, Aide Castro Fuentes<sup>2</sup>, Celina Elena Urrutia vargas<sup>3</sup>, Víctor Hugo Hernández Gómez<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Carretera Cuautitlán Teoloyucan Km 2.5. Cuautitlán Izcalli Estado de México. C.P. 54714

AP- POSM056

## Resumen

Derivado de la pandemia producida por el SARS-COV2, fue necesario realizar actividades fuera del aula de clases, este problema permitió desarrollar nuevas opciones de enseñanza.

En la materia de Electricidad y Magnetismo, se contemplan ecuaciones diferenciales e integrales en diversas de las ecuaciones principales que sustentan esta área del conocimiento. Una de las ecuaciones más relevante es la Ley de Gauss.

En este trabajo se muestra el análisis de la ecuación de Gauss para campos eléctricos en su forma diferencial e integral y un experimento práctico que permitió la mejor comprensión de la misma por parte de los alumnos. El desarrollo de la experimentación permitió a los alumnos desarrollar una actividad práctica complementaria a la parte matemática desde la comodidad de su casa.

También se muestran los resultados de la aplicación del experimento y se muestran las conclusiones finales.

**Palabras clave:** Electricidad, Magnetismo, Gauss, Campo Eléctrico, Experimento, Diferencial.

## 1. Introducción

A finales de 2019 en la región de Wuhan, China. Estalló lo que sería una de las últimas pandemias originada por una mutación del Coronavirus: el SARS-COV2 que produce la enfermedad COVID 19. Derivada de la situación sanitaria la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), determinó comenzar clases a distancia para todos sus campus.

En la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (FESC), la cual cuenta con una población estudiantil de más de 18,000 alumnos, se decidió que cada Departamento Académico determinara las medidas necesarias para mantener las clases, incluyendo en este contexto aquellas que requerían de laboratorios para desarrollar actividades prácticas.

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: pgconacyt@gmail.com

44 Uno de los Departamentos que atiende varias carreras dentro de la FESC es el  
45 Departamento de Física, los profesores que integran el Departamento han trabajado  
46 desde hace varios años en Claustros del conocimiento, buscando la mejora continua,  
47 para brindar a los alumnos el conocimiento adaptándose a las necesidades del país.

48 El Claustro de Teoría Electromagnética se encuentra integrado por los siguientes  
49 académicos:

50 Ing. Baruch Arriaga Morales, Ing. Eduardo Carrizales Ramírez, Ing. Aide Castro  
51 Fuentes, Ing. Juan Rogelio Castro Sánchez, Ing. Lucía García Luna, Dr. Pedro  
52 Guzmán Tinajero, Dr. Ramón Osorio Galicia, Ing. Ángel Rueda Ángeles, Ing. César  
53 Rueda Ángeles, Ing. Antonio Serrano Aponte, Ing. Ana María Terreros de la Rosa y  
54 Dr. Víctor Hugo Hernández Gómez, Carlos González Hernández y Gilberto González  
55 Ortíz.

56  
57 El Claustro de Teoría Electromagnética, al igual que los otros que integran el  
58 Departamento de Física, decidió afrontar los nuevos retos derivados de la pandemia,  
59 desarrollando una serie de prácticas que permitieron reforzar el conocimiento práctico  
60 de su teoría con experimentos sencillos que se realizaban desde casa.

61 La asignatura de Electricidad y Magnetismo se imparte en el tercer semestre de las  
62 carreras de Ingeniero en Telecomunicaciones Sistemas y Electrónica, Ingeniero  
63 Mecánico Electricista e Ingeniero Industrial. Es una materia obligatoria y cuenta con  
64 11 créditos ya que su naturaleza es teórico - práctica. Es decir, cuenta con una parte  
65 experimental que se imparte en el laboratorio.

66  
67 La asignatura de Teoría Electromagnética se imparte en el quinto semestre de la  
68 carrera de Ingeniero en Telecomunicaciones Sistemas y Electrónica. Es una materia  
69 obligatoria y cuenta con 10 créditos ya que su naturaleza es teórico - práctica. Es decir,  
70 cuenta con una parte experimental que se imparte en el laboratorio.

71  
72 En las asignaturas de Electricidad y Magnetismo y Teoría Electromagnética, uno de  
73 los temas a desarrollar es la Ley de Gauss para campos eléctricos y magnéticos. Sin  
74 embargo, la parte práctica de este tema requería contar con equipo especializado que  
75 en su gran mayoría no existía en casa de los alumnos.

76  
77 Por todo lo anterior, se decidió trabajar de manera colegiada para desarrollar un  
78 experimento que permitiera a los alumnos y alumnas, comprender el tema de la Ley  
79 de Gauss y desarrollarlo de manera práctica desde sus hogares. A través de una  
80 analogía hidráulica.

### 81 82 1.1 Objetivo

83 Desarrollar un experimento realizable desde casa, que permita mejorar la comprensión  
84 de la Ley de Gauss aplicable al campo eléctrico.

85

86 1.2 Problema

87 Se requiere un experimento utilizando solo elementos que se tengan en casa, que  
88 explique de manera objetiva la Ley de Gauss para campos eléctricos.

89

90 1.3 Hipótesis

91 Si se cuenta con un experimento, que los alumnos y alumnas desarrollen con  
92 elementos que tengan en su casa, se mejorará la comprensión del concepto de la  
93 ecuación matemática de la Ley de Gauss para campos eléctricos.

94

95 1.4 Estado del Arte

96

97 1.4.1 Gauss

98

99 Karl Friedrich Gauss (1777-1855), fue sin duda un matemático prominente del siglo  
100 XIX, presentando grandes aportaciones, no solo en su campo, incluso en áreas como  
101 la astronomía o la Física, por ejemplo, postuló en 1835 la denominada Ley de Gauss  
102 para campos eléctricos que describe la relación entre la carga eléctrica y los campos  
103 producidos por esta. Definitivamente su aportación al estudio de los campos eléctricos  
104 y magnéticos sentó la base para que años después Maxwell pudiera fusionar ambas  
105 teorías.

106

107

108 1.4.2 Flujo vectorial

109

110 Cualquier flujo de un campo vectorial  $\vec{\phi}$  se puede evaluar a través de una integral de  
111 superficie. Wikipedia (2022). Considerando en primer término el vector del campo en  
112 cuestión y sumando las diferenciales que se registren en toda la superficie cerrada. En  
113 otras palabras, si se considera un vector  $\vec{A}$  cualquiera y se le evalúa a través de una  
114 superficie cerrada, la suma de los diferenciales de superficie dará como resultado el  
115 flujo vectorial  $\phi_{\vec{A}}$ , como se indica en Ec. (1)

116

117 **Ecuación 1.** 
$$\phi_{\vec{A}} = \iint_{L_i}^{L_s} \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

118

119

120

121 1.4.3 Ley de Gauss para campos eléctricos

122

123 En el cálculo del flujo eléctrico se considera inicialmente una placa cargada con una  
124 distribución superficial de carga  $\sigma_s$  la cual tendrá una configuración perpendicular de  
125 campo eléctrico, producido por cada carga en la placa, tal como se indica en la figura,  
126 ver Fig. (1).

127

128

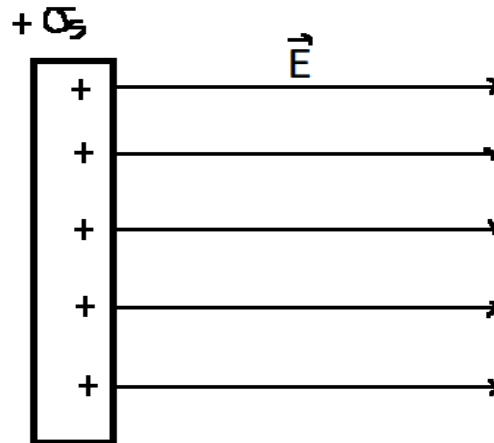


Figura 1. Placa con distribución de carga positiva

129  
 130  
 131  
 132  
 133  
 134  
 135  
 136  
 137

Si se considera una superficie cerrada y se evalúa de manera integral, en el caso de campos constantes el resultado siempre dará como resultado cero. Esto es debido a que no ocurre cambio respecto al campo vectorial que entra y sale de la superficie de control. En este caso el flujo sería cero, como se muestra en la figura, ver Fig. (2).

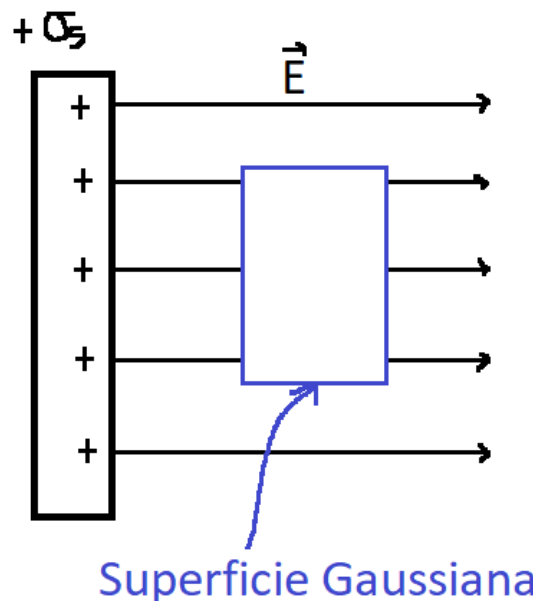


Figura 2. Placa con distribución de carga positiva con superficie Gaussiana

138  
 139  
 140  
 141  
 142  
 143  
 144

En esta condición y aplicando la ecuación determinada para un flujo de un campo vectorial al vector de campo eléctrico, se tendría como resultado cero, cómo se indica en Ec. (2)

145  
 146  
 147  
 148  
 149  
 150  
 151  
 152

**Ecuación 2.**  $\oint_{Li}^{Ls} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0$

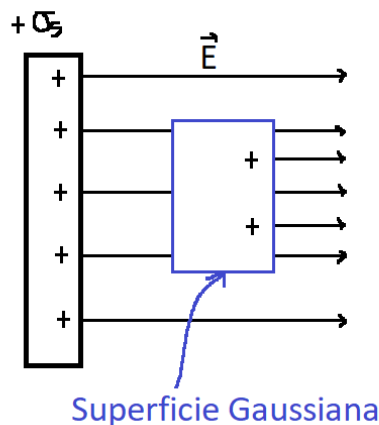
Sin embargo, el campo eléctrico no siempre es constante, ya que los cuerpos pueden adquirir o ceder cargas eléctricas constantemente. Cuando la diferencia de cargas es significativa se genera un arco eléctrico entre dos cuerpos, incrementándose cuando la distancia es lo suficientemente pequeña para generarlo. Ver Fig. (3)



**Figura 3. Arco eléctrico producido por la diferencia de cargas entre dos cuerpos**

153  
 154  
 155  
 156  
 157  
 158  
 159  
 160

Ante la consideración de que el campo eléctrico no fuera constante Gauss, determinó que, de presentarse alguna diferencia de flujo, ésta debía ser producida por la existencia de cargas (positivas o negativas), dentro del volumen de control (superficie Gaussiana). Ver Fig. (4)



**Figura 4. Flujo eléctrico derivado de las cargas en el volumen**

161  
 162

163

164 Para considerar la posibilidad de las variaciones del campo eléctrico en la entrada y  
165 salida del volumen de control (derivado de las cargas en la Superficie Gaussiana) y  
166 observando que el campo vectorial también era afectado por el medio de conducción  
167 (constante de permitividad del medio  $\epsilon$ ), Gauss ajustó la ecuación añadiendo todos  
168 estos factores. cómo se indica en Ec. (3)

169

170 **Ecuación 3.** 
$$\oint_{Li}^{Ls} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_n}{\epsilon}$$

171

172 Para complementar, si definimos un campo vectorial denominado densidad de flujo  
173 eléctrico  $\vec{D}$ , en el que se incluye la intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  y la constante de  
174 permitividad del medio  $\epsilon$ , como se indica en Ec. (4).

175

176 **Ecuación 4.** 
$$\vec{D} = \vec{E}\epsilon$$

177

178 Y sustituyendo la expresión anterior, la Ec. (3) se puede reescribir como se indica en  
179 la Ec. (5)

180

181 **Ecuación 5.** 
$$\oint_{Li}^{Ls} \vec{D} \cdot \vec{dS} = Q_n$$

182

183 Las ecuaciones anteriores Ec. (3) y Ec. (5) representan la ley de Gauss para campos  
184 eléctricos en su forma Integral. Para conocer su forma diferencial bastaría aplicar el  
185 teorema de la divergencia y considerar la distribución volumétrica  $\rho_v$  para que el  
186 resultado se aprecie en la Ec. (6)

187

188 **Ecuación 6.** 
$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \rho_v$$

189

190

191

## 192 2. Metodología o desarrollo

193

### 194 2.1 Detección del problema

195

196 El estudio de la carga eléctrica y su relación con el campo eléctrico es fundamental  
197 para los alumnos y alumnas de ingeniería. En materias como Electricidad y  
198 Magnetismo y Teoría electromagnética se analizan sus combinaciones y su interacción  
199 en voltajes y corrientes. Sin embargo, al transcurso de nuestra experiencia académica,  
200 encontramos que existen diferentes deficiencias en las bases matemáticas de nuestros  
201 alumnos. Por ejemplo, detectamos en sus exámenes un factor común: la incapacidad  
202 de definir de manera correcta la ley de Gauss.

203

### 204 2.2 Experimento

205



206 Para fortalecer la comprensión de la Ley de Gauss, se tomó como grupo de estudio el  
207 2301 dejando el 2351 como control. Se decidió desarrollar un experimento utilizando  
208 cubos de hielo para representar las cargas eléctricas, vasos de unicel ocuparían el  
209 papel de la superficie Gaussiana y el agua que se genera al derretirse los cubos de  
210 hielo serían el flujo del campo vectorial.

211  
212 Una vez determinados los materiales y la metodología para representar el fenómeno  
213 se desarrolló el experimento grabándolo en vídeo, el resultado se colocó en la  
214 plataforma de YouTube: Alumnos del doctor Pedro (2021) y se compartió a los  
215 alumnos del grupo de estudio mediante la plataforma de Classroom, dejándolo como  
216 video privado para controlar los alumnos que lo verían.

217

218

### 219 **3. Resultados y análisis**

220

221 Una vez que se desarrollaron estrategias como la planteada en este trabajo, se  
222 observó la mejor comprensión de los temas que involucraban ecuaciones con  
223 derivadas e integrales. En el caso concreto de la ley de Gauss esta tuvo una efectividad  
224 de comprensión en los exámenes del 95% respecto al 78% que obtuvo el grupo de  
225 control. (Considerado con la respuesta de los exámenes aplicados en el semestre en  
226 ambos grupos).

227

### 228 **4. Conclusiones**

229

230 En nuestra opinión, las ecuaciones que representan fenómenos físicos, pero que  
231 involucran diferenciales, integrales y derivadas, generan un conflicto mayor en el  
232 entendimiento de los alumnos, por el rechazo natural que estos tienen al cálculo  
233 diferencial e integral. Utilizar herramientas como las mostradas en este trabajo,  
234 permiten a los educandos mejorar la percepción de los fenómenos reforzados por la  
235 experimentación.

236 Lograr traducir las ecuaciones a eventos prácticos no solo permite reforzar el  
237 conocimiento de la física, también refuerza el conocimiento propio de las matemáticas  
238 involucradas en ello.

239

240 Como comentario final, es importante mencionar que si bien el vídeo se utilizó para un  
241 grupo en particular los demás alumnos solicitaron se compartiera la liga, así que al  
242 final de la evaluación se dejó como vídeo público y actualmente cuenta con más de  
243 830 reproducciones a 10 meses de haberse publicado, (abril de 2021).

244

### 245 **5. Índice de referencias**

246

247 Información en línea

- 248
- 249
- 250
- 251
- 252
- 253
- Alumnos del doctor Pedro (2021). Ley de Gauss para simples mortales con experimento. [En línea] Disponible en:  
[https://www.youtube.com/watch?v=U1M8lup3\\_sc](https://www.youtube.com/watch?v=U1M8lup3_sc)
  - Wikipedia (2022). Flujo de un campo vectorial. [En línea] Disponible en:  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Flujo\\_de\\_un\\_campo\\_vectorial](https://es.wikipedia.org/wiki/Flujo_de_un_campo_vectorial)

MEMORIAS DEL

# Congreso Internacional

Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas

# REACTANCIA ELÉCTRICA: APLICACIÓN DE LOS NÚMEROS IMAGINARIOS

Pedro Guzmán Tinajero<sup>1\*</sup>, Aide Castro Fuentes<sup>2</sup>, Víctor Hugo Hernández Gómez<sup>3</sup>, Miguel de Nazareth Pineda Becerril<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Carretera Cuautitlán Teoloyucan Km 2.5. Cuautitlán Izcalli Estado de México. C.P. 54714

AP- POSM057

## Resumen

El concepto de número imaginario es muy utilizado en las asignaturas del área eléctrica, sin embargo, las experiencias prácticas con este término matemático son escasas. Este artículo muestra un análisis de la reactancia eléctrica desde el enfoque matemático de los números imaginarios, complementándolo con experimentación.

Se desarrolló un experimento práctico para el mejor entendimiento de la aplicación de las reactancias, esto permite entender cómo funciona un circuito oscilador. Este circuito es básico en ingeniería para entender el proceso de las Telecomunicaciones.

El análisis presentado muestra los beneficios de este tipo de vinculación entre las matemáticas y la física, permitiendo éxito en los trabajos a distancia derivados por la pandemia actual.

**Palabras clave:** Electricidad, Magnetismo, Imaginario, Experimento, Oscilador.

## 1. Introducción

Derivada de la situación sanitaria que se produjo en el año 2020, la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a partir del mes de abril, determinó comenzar clases a distancia para todos sus campus, bajo el slogan de que ¡la UNAM no se detiene!

En la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán (FESC), se cuenta con una población estudiantil aproximada de más de 18,000 alumnos, se decidió que cada Departamento Académico determinara las medidas necesarias para mantener las clases, incluyendo en este contexto aquellas que requerían de laboratorios para desarrollar actividades prácticas.

Bajo un orden matricial, los Departamentos de Física y Matemáticas son de los más importantes en la impartición de conocimientos en la ciencia básica, ya que atienden varias carreras dentro de la FESC. Por esta razón se ha trabajado desde hace varios años en Claustros del conocimiento, buscando la mejora continua, para brindar a los alumnos el conocimiento adaptándose a las necesidades del país.

<sup>1</sup> Autor para la correspondencia. E-mail: pgconacyt@gmail.com. Tel. 56231887

43

44 En un trabajo colegiado que integra profesores de física y matemáticas, se decidió  
45 afrontar los nuevos retos derivados de la pandemia, desarrollando una serie de  
46 prácticas que permitieron reforzar el conocimiento práctico de su teoría con  
47 experimentos sencillos que se realizaban desde casa.

48 Como referencia la asignatura de Teoría Electromagnética se imparte en el quinto  
49 semestre de la carrera de Ingeniero en Telecomunicaciones Sistemas y Electrónica.  
50 Es una materia obligatoria y cuenta con 10 créditos ya que su naturaleza es teórico -  
51 práctica. Es decir, cuenta con una parte experimental que se imparte en el laboratorio.

52

53 Por todo lo anterior, se decidió trabajar de manera colegiada para desarrollar un  
54 experimento que permitiera a los alumnos y alumnas, comprender el tema de la  
55 reactancia y el circuito oscilador pasivo y desarrollarlo de manera práctica desde sus  
56 hogares. A través de una analogía hidráulica.

57

#### 58 1.1 Objetivo

59 Desarrollar un experimento realizable desde casa, que permita mejorar la comprensión  
60 de la reactancia eléctrica.

61

#### 62 1.2 Problema

63 Se requiere un experimento utilizando solo elementos que se tengan en casa, que  
64 explique de manera objetiva la reactancia eléctrica.

65

#### 66 1.3 Hipótesis

67 Si se cuenta con un experimento, que los alumnos y alumnas desarrollen con  
68 elementos que tengan en su casa, se mejorará la comprensión del concepto de la  
69 reactancia eléctrica y su relación con circuitos osciladores pasivos.

70

#### 71 1.4 Estado del Arte

72

##### 73 1.4.1 Números imaginarios

74

75 Según Ramírez (2019), la primera mención de un número imaginario se produce en el  
76 año 75 d.C. en el libro estereometría escrito por el griego Herón de Alejandría, al querer  
77 calcular la altura de una pirámide trunca. El mismo autor indica que el italiano  
78 Gerolamo Cardano fue el primer autor en introducir el concepto de una raíz negativa y  
79 que fue René Descartes el responsable de darle a esta expresión el mote de números  
80 imposibles o imaginarios, por no pertenecer a los números reales.

81

82 Esta condición de representar situaciones imposibles ha sido heredada a las diferentes  
83 disciplinas del conocimiento, en dónde se utilizan muchas veces para representar  
84 situaciones que no deberían suceder, pero que, en un principio de manera inexplicable,  
85 sucedían.

86

87

#### 88 1.4.2 Capacitor y capacitancia

89

90 El capacitor es un dispositivo eléctrico conformado por dos superficies equipotenciales  
91 y separado por un medio dieléctrico (no conductor) entre ellas. Posee la particularidad  
92 de almacenar cargas cuando se conecta en corriente continua y trabajar como un filtro  
93 cuando se conecta a la corriente alterna.

94

95 La capacitancia por tanto puede entenderse como la capacidad que tiene un capacitor  
96 de almacenar carga eléctrica en sus superficies equipotenciales. Sin embargo, surge  
97 la pregunta obligada ¿Cómo es que el capacitor puede almacenar cargas si se  
98 encuentra separado por un medio dieléctrico?

99

100

101 Esta interrogante estuvo vigente hasta que, primero Faraday de manera experimental  
102 y posteriormente Maxwell determinaron la posibilidad de que la carga eléctrica se  
103 pudiera transmitir aún en medios dieléctricos. Lo cual abrió el panorama para que  
104 Tesla investigara a fondo el uso de una corriente variable en el tiempo.

105

#### 106 1.4.3 Inductor e inductancia

107

108 El inductor es un elemento eléctrico conformado por un alambre conductor enrollado.  
109 Cuando se le alimenta con corriente continua tiende a comportarse como un corto  
110 circuito, produciendo como demostró Oersted un campo magnético a su alrededor de  
111 acuerdo a la ley de la mano derecha.

112

113 Sin embargo, cuando a un inductor se le alimenta con corriente alterna, produce una  
114 carga y descarga oscilatoria capaz de generar radiación magnética. Si se aproxima  
115 una segunda bobina, sin necesidad de una conexión física, ésta última recibirá la  
116 energía magnética, transformándola nuevamente en corrientes y voltaje. Como lo  
117 determinó experimentalmente Faraday.

118

#### 119 1.4.4 Reactancia eléctrica

120

121 La reactancia eléctrica es el valor en unidades de Ohm, de la oposición que presenta  
122 un capacitor o un inductor al paso del flujo de cargas cuando se le alimenta con un  
123 voltaje de corriente alterna. Existen reactancias tanto capacitivas  $X_C$  como inductivas  
124  $X_L$ , en ambos casos afectadas por la frecuencia angular  $\omega$ , estos valores son  
125 representados por números imaginarios enmarcados por la letra  $j$  (no se utiliza  $i$ , para  
126 no confundirla con la intensidad de corriente eléctrica), es interesante apuntar que la  
127 reactancia capacitiva y la reactancia inductiva se presentan con signos opuestos, lo  
128 que brinda la oportunidad de su anulación en la suma algebraica produciendo el  
129 fenómeno conocido como resonancia, Ver Ecs. (1) – (2)

130

131

**Ecuación 1.**  $X_L = j \omega L$

132

133

**Ecuación 2.**  $X_C = -j \frac{1}{\omega C}$

134

135 La reactancia eléctrica representa entonces la “resistencia imaginaria” que posee un  
 136 capacitor o un inductor al conectarse a la corriente alterna. Se debe recordar que la  
 137 presencia de la alternancia se encuentra en la variación angular  $\omega$ , pues ésta está  
 138 conformada por la frecuencia de la onda y la relación de  $2\pi$ .

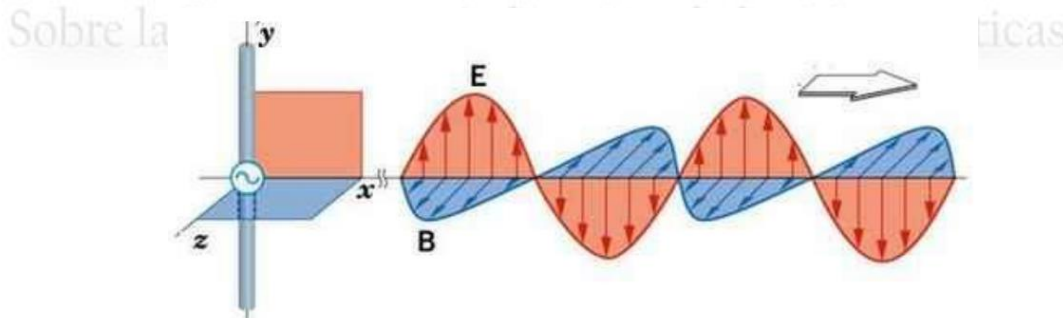
139

140 1.4.5 Circuito oscilador pasivo (LC)

141

142 De acuerdo a las ecuaciones de Maxwell, uno de los requisitos indispensables para  
 143 que coexistan el campo eléctrico y el magnético es la variación en el tiempo de uno de  
 144 ellos y la variación en la posición del otro. Dando como resultado la ecuación de Onda  
 145 (Ecuación de Alembert). Por esto el dipolo eléctrico puede crear una onda TEM cuando  
 146 se alimenta a él energía alterna. (Circuito oscilador), Fig. (1)

147



148

149

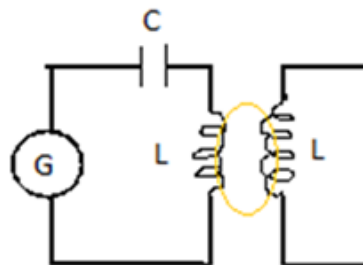
**Figura 1. Onda TEM**

150

151 El circuito oscilador pasivo está compuesto por un capacitor y un inductor, que al  
 152 interactuar generan una onda de tipo alterna. Es por ello que este circuito es básico en  
 153 las telecomunicaciones y aunque posteriormente evoluciona a los filtros activos  
 154 (contando con componentes de amplificadores operacionales) aún se continúa usando  
 155 para producir ondas TEM básicas. Fig. (2)

156

157



156

157

**Figura 2. Circuito oscilador pasivo (LC)**

158

## 159 2. Metodología o desarrollo

160

### 161 2.1 Detección del problema

162

163 El estudio de la carga eléctrica y su relación con el campo eléctrico es fundamental  
164 para los alumnos y alumnas de ingeniería. En particular en la asignatura de Teoría  
165 Electromagnética, requiere el conocimiento de la interacción de los números complejos  
166 para las telecomunicaciones.

167

### 168 2.2 Experimento

169

170 Para fortalecer la comprensión de la reactancia considerada como parte imaginaria de  
171 una impedancia (número complejo). Se decidió desarrollar un experimento utilizando  
172 un equivalente hidráulico de un circuito LC. Para ello se utilizó una botella, manguera  
173 de nivel y agua.

174

175 El capacitor fue representado por la botella, el inductor por la manguera traslúcida y la  
176 intensidad de la corriente eléctrica por el agua contenida en el experimento. La  
177 variación en el tiempo se consigue cuando el alumno o alumna rota la botella para  
178 trasladar la “carga” del capacitor al inductor y viceversa.

179



180 **Figura 3. Equivalente hidráulico al circuito oscilador pasivo (LC)**

181

182

183 Una vez determinados los materiales y la metodología para representar el fenómeno  
184 se desarrolló el experimento grabándolo en vídeo, el resultado se colocó en la  
185 plataforma de Youtube: Alumnos del doctor Pedro (2022) y se compartió a los alumnos  
186 del grupo de estudio mediante la plataforma de Classroom, dejándolo como video  
187 privado para controlar los alumnos que lo verían.

188

189

### 190 3. Resultados y análisis

191

192 Una vez que se desarrollaron estrategias como la planteada en este trabajo, se  
193 observó la mejor comprensión de los temas que involucraban números imaginarios  
194 como la reactancia.

195

196 La equivalencia hidráulica permitió a los alumnos y alumnas comprender de mejor  
197 manera la interacción del capacitor y del inductor en un circuito oscilador pasivo,  
198 también llamado LC. Este circuito es la base de las telecomunicaciones modernas, por  
199 ello resulta de vital importancia la comprensión del tema.

200

### 201 4. Conclusiones

202

203 El concepto de los números imaginarios es necesario para la mejor comprensión de  
204 temas como la reactancia eléctrica ya que este tema se utiliza en líneas de transmisión  
205 y telecomunicaciones. Utilizar herramientas como las mostradas en este trabajo,  
206 permiten a los educandos mejorar la percepción de los fenómenos reforzados por la  
207 experimentación.

208

209 Lograr traducir las ecuaciones a eventos prácticos no solo permite reforzar el  
210 conocimiento de la física, también refuerza el conocimiento propio de las matemáticas  
211 involucradas en ello.

212

213

### 214 5. Índice de referencias

215

#### 216 Información en línea

217 • Alumnos del doctor Pedro (2022). Circuito L C con experimento hidráulico  
218 equivalente. [En línea] Disponible en:

219 <https://www.youtube.com/watch?v=yxjqcZQ4uSA>

220

221 • Ramírez (2019). Una breve historia imaginaria. [En línea] Disponible en:  
222 [https://www.researchgate.net/profile/Camilo-Ramirez-](https://www.researchgate.net/profile/Camilo-Ramirez-Maluendas/publication/332412976_Una_breve_historia_imaginaria/links/5f6b7472299bf1b53eec3dce/Una-breve-historia-imaginaria.pdf)

223 [Maluendas/publication/332412976\\_Una\\_breve\\_historia\\_imaginaria/links/5f6b7](https://www.researchgate.net/profile/Camilo-Ramirez-Maluendas/publication/332412976_Una_breve_historia_imaginaria/links/5f6b7472299bf1b53eec3dce/Una-breve-historia-imaginaria.pdf)

224 [472299bf1b53eec3dce/Una-breve-historia-imaginaria.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Camilo-Ramirez-Maluendas/publication/332412976_Una_breve_historia_imaginaria/links/5f6b7472299bf1b53eec3dce/Una-breve-historia-imaginaria.pdf)



# EL ANÁLISIS MATEMÁTICO APLICÁNDOLO A LOS NEGOCIOS

Sánchez Barrera Julio Moisés<sup>1\*</sup>, Sánchez Flores María del Sagrario<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Carretera Cuautitlán Teoloyucan Km 2.5. Cuautitlán Izcalli Estado de México. C.P. 54714

AP-POSM058

## Resumen

El objetivo de esta investigación fue crear conciencia en los Estudiantes de las diferentes carreras de las Ciencias Económico-Administrativas e Ingenierías del por qué deben aprender el Análisis Matemático y para qué lo van a aplicar en su vida profesional.

El estudio da una propuesta didáctica de cómo valorando el uso de la visualización de las gráficas de funciones matemáticas y a través del análisis variacional, el alumno puede apropiarse del conocimiento e interpretarlo, logrando así que entienda que el análisis matemático no es solo la continuación del álgebra o más algoritmia, ya que los análisis matemáticos también nos sirven para analizar el comportamiento de las funciones y las funciones también pueden representan comportamientos Económicos.

En la investigación se tomó en cuenta los conocimientos que se imparten de matemáticas a los alumnos de la FES Cuautitlán, en las Maestría de Administración y Finanzas, y a nivel licenciatura en Ingeniería, tratamos de explicar el por qué se deben incluir estos concimientos en los planes de estudio de las carreras de Licenciatura en Contaduría, Administración e Informática.

Los resultados obtenidos demuestran claramente el por qué y para qué es indispensable el análisis de funciones en estas carreras, su aplicación en los negocios, y por lo tanto su uso en comportamientos económicos.

**Palabras clave:** Análisis Matemático, Funciones, Variacional, Comportamiento Económico.

## 1. Objetivo

El objetivo de este trabajo es el que los estudiantes vean que el análisis matemático tiene aplicación practica en los negocios, y al ser de esta manera se ocupan en la mayoría de las diciplinas. La investigación surge por qué el aprendizaje del análisis matemático en la mayoría de los casos carece de significado para los alumnos quienes consideran que su enseñanza es primordialmente por el aspecto algebraico.

## 2. Marco Teórico

<sup>1</sup> \*Autor para la correspondencia. E-mail: juliomoisessb@yahoo.com.mx, Tel. 55-21-96-61-14

36 Esté trabajo se realizó basado en la Ingeniería Didáctica, la cual está basado  
37 principalmente en dos teorías: La Teoría de Situaciones Didácticas (Guy Brousseau)  
38 y la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard), que son los referentes de la  
39 Ingeniería Didáctica.

40 La “Ingeniería Didáctica”, surge a principios de los años ochenta, al seno de la  
41 Didáctica francesa de la matemática, según Douady (1995), una “Ingeniería Didáctica”  
42 es un conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas, y articuladas  
43 coherentemente por un “profesor ingeniero”, para lograr el aprendizaje de cierto  
44 conocimiento en un grupo de alumnos específico. Por lo tanto, se considera que la  
45 Ingeniería Didáctica es un “producto” que resulta de un análisis preliminar, donde se  
46 tienen en cuenta las dimensiones cognitivas, didácticas y epistemológicas del  
47 conocimiento a impartir de un análisis a priori en el cual se decide sobre que variables  
48 didácticas son pertinentes y sobre cuales se actuara, en este caso se incorpora un  
49 cuarto componente, que es el sociocultural, lo que se refiere a ponerlo en escena.

50 Brousseau nos habla de una “génesis ficticia” de los saberes puestos en juego en el  
51 aula con el propósito de facilitar su enseñanza, en la cual se aíslan las nociones y  
52 propiedades de las actividades que les dieron: origen, sentido, motivo, y utilización.  
53 Considera a su vez, la necesidad de retornar e incorporar en el discurso escolar, la  
54 historia de los saberes, esto es, indagar sobre las dificultades y preguntas que  
55 provocaron su aparición como: conceptos necesarios y su evolución y uso de nuevos  
56 problemas.

57 Según Chevallard, el conocimiento matemático no llega al aula tal y como es  
58 producido, sino que sufre un proceso que ha denominado “transposición didáctica”. El  
59 “saber erudito” pasa a ser un “saber a enseñar”, luego de ser validado por una  
60 “noosfera” que le confiere el estatus de conocimiento a ser aprobado en la escuela.

61 Para Cantoral, “transponer” significa poner una cosa más allá en un sitio distinto del  
62 lugar que ocupaba, el termino transposición didáctica implica “transponer” un saber al  
63 ámbito escolar.

64 Brousseau, desarrolla su teoría de las situaciones didácticas reformulando ciertas  
65 ideas generadas por Piaget, considera que un individuo aprende en la medida en que  
66 construye o resignifica un concepto incorporándolo a su estructura cognitiva, por medio  
67 de un proceso de asimilación y acomodación, a un medio que es factor de  
68 desequilibrios y dificultades en su proceso de construcción del conocimiento. Se  
69 considera entonces, que el conocimiento es una construcción personal, en tanto que  
70 el saber proviene de una elaboración cultural, siendo motivo de interés la génesis, en  
71 cuanto a su historia del saber.

72 El docente debe proponerle al alumno, una situación que le permita dotar conocimiento  
73 que se desea impartir, la situación planteada debe tener por objeto que el alumno  
74 interactúe con el saber, es decir formule, pruebe, construya modelos, lenguajes,  
75 conceptos, o teorías que intercambie con otros. La situación debe ser fuente de  
76 aprendizaje, en ciertas ocasiones, también criterio de validación de las estrategias  
77 puestas en juego.

78 Se considera que el alumno se ha apropiado del conocimiento, cuando es capaz de  
79 utilizarlo fuera del contexto de enseñanza, y en momentos donde no haya indicación  
80 intencional, denominándose a éstos “situaciones no didácticas”, que están regidas por  
81 el “contrato didáctico”, es decir, por las obligaciones implícitas que se establecen  
82 entre los actores del sistema didáctico, esto es en la tríada *docente-alumno-*  
83 *conocimiento*. Se define “situaciones didácticas” como aquéllas en las cuales el  
84 profesor se aparta del escenario dejando que el alumno viva esta situación como  
85 investigador de un problema matemático, independiente del sistema educativo.

86 Brousseau, distingue diferentes tipos de situaciones “a-didácticas”, que son: acción,  
87 formulación y validación, así como institucionalización. Situación “a-didáctica” de  
88 validación, es aquella donde el conocimiento toma la forma de conocimiento totalmente  
89 adquirido.

90 Por lo que surge el “contrato pedagógico”, que apunta a reglamentar los cambios entre  
91 dos partes que toma, por un periodo limitado, un sistema de derechos y deberes  
92 recíprocos; supone el principio de un consentimiento mutuo de las partes ya que se  
93 funda sobre el enunciado de reglas de juego a las que cada uno debe libremente  
94 someterse.

95 Brousseau, construye la noción de “contrato didáctico”, para explicar las relaciones de  
96 profesores y alumnos las cuales son condicionadas por un proyecto social exterior a  
97 ambos que se les impone y que se les da razón de ser, y difiere del “contrato  
98 pedagógico” en que no es percedero, sino que evoluciona y se transforma a la par de  
99 los conocimientos puestos en juego.

100 El profesor de matemáticas tiene una dimensión social que se impone, le compete a  
101 él lograr el buen aprendizaje de cada alumno y asegurar la homogeneidad de la  
102 construcción de saberes y su coherencia a nivel de toda la clase. Esta dimensión social  
103 da al profesor una posición particular, es el eslabón entre los saberes sociales y los  
104 saberes construidos en la clase. El contrato debe garantizar la devolución, de no ser  
105 así, se producen las rupturas, y la búsqueda de nuevos contratos se torna importante.

106 Por lo tanto, la “Ingeniería Didáctica” es un instrumento metodológico para la  
107 enseñanza y para la investigación, que nos brinda la posibilidad de desarrollar una  
108 acción racional sobre el sistema educativo, pues intenta captar la complejidad de los  
109 procesos de enseñanza y sobre todo el de aprendizaje en situación escolar.

110 Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en la elaboración de una  
111 Ingeniería Didáctica, a saber: 1º análisis preliminar, 2º diseño de la situación didáctica  
112 y su análisis a priori, 3º experimentación y 4º análisis de validación.

113 1º Análisis preliminar: Se analizan y determinan, desde una aproximación sistemática,  
114 todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los  
115 mismos, por lo cual se toma en consideración: el componente cognitivo, el componente  
116 didáctico y el componente sociocultural.

117 2º Análisis a priori y diseño de la situación didáctica: En esta fase de la Ingeniería  
118 Didáctica se eligen las variables didácticas que se controlan y se define la forma que  
119 las mismas serán gestionadas. Es una fase tanto prescriptiva como predictiva.

120 3º Experimentación: En esta etapa se procede a la “puesta en escena” de la situación  
121 diseñada, es decir, se la implementa en condiciones controladas estrictamente por el  
122 investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos,  
123 pues el conocimiento y caracterización de estos redundará en la calidad y fidelidad de  
124 la siguiente etapa.

125 4º Análisis de validación: Consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos  
126 acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en esta etapa se  
127 confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina, en qué medida,  
128 las expectativas fueron alcanzadas o cuánto se desvían los resultados de lo que se  
129 esperaba. Se deducen dos aspectos relevantes de ésta, el estricto control que debe  
130 ejercerse en la experimentación y la precisión del análisis preliminar.

131 Por otro lado, hoy en día, con el uso de las nuevas tecnologías, como por ejemplo el  
132 software de Ambiente Graphmatica puede apoyar en la enseñanza del análisis  
133 matemático, para que se cumpla el objetivo de que el aprendizaje sea significativo en  
134 las carreras de las Ciencias Económico-Administrativas e Ingenierías.

135

136

### 137 3. Desarrollo

138 Se diseño y aplico el siguiente cuestionario a egresados de las diferentes carreras de  
139 Licenciatura en Contaduría y Administración y en las áreas de la Ingeniería, para

140 evaluar su conocimiento en lo referente a las aplicaciones del análisis matemático en  
141 los negocios.

142 Los egresados a los que se les aplicó el cuestionario son aspirantes a estudiar una  
143 maestría en la FES-Cuautitlán, en el momento que se les aplicó el cuestionario,  
144 estaban cursando el curso propedéutico de matemáticas, con el objetivo de lograr  
145 cursar un posgrado.

Según su experiencia y/o punto de vista o conocimiento conteste las siguientes preguntas

1. ¿Para qué las Matemáticas en los Negocios los Negocios?
2. ¿Para qué el Álgebra en los Negocios?
3. ¿Por qué es Necesario el Análisis Matemático en los Negocios?
4. ¿Cuanto tiempo tiene de estar Trabajando en lo relacionado con la Carrera de Ingeniero que estudio?
5. ¿Cuanto tiempo tiene que termino la Carrera de Ingeniero?
6. ¿Cuál es su rama de la Ingeniería que estudio?
7. ¿A que actividad o actividades se dedica desde que termino la carrera o titulo?

146  
147  
148  
149

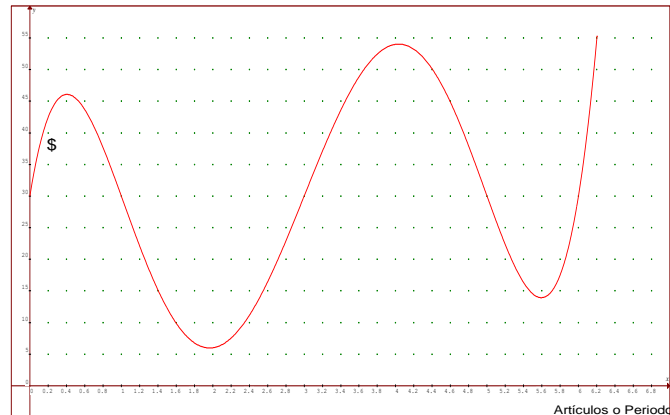
**Cuestionario. – Utilizado a Ingenieros aspirantes a estudiar una Maestría en la FES-Cuautitlán**

150 De la aplicación del Cuestionario, nos dimos cuenta que la mayoría no utiliza el análisis  
151 matemático en los negocios, ya que solo un 20% nos mencionó que este si se puede  
152 aplicar en los negocios, y de éste 20% solo el 10% nos señaló ejemplos de aplicación.

153

**4. Aplicaciones del Análisis Matemático a los Negocios**

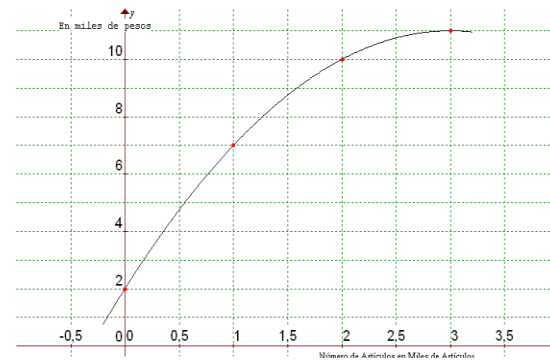
154 Tomando en cuenta que las funciones nos describen comportamientos, estos  
155 comportamientos pueden ser comportamientos de fenómenos económicos, tales como  
156 los costos, los inventarios, la producción, los ingresos, los egresos, la utilidad, la oferta,  
157 la demanda, entre otros.  
158



159  
 160  
 161  
 162  
 163  
 164  
 165  
 166  
 167

**Fig. (1), Descripción de Comportamientos Económicos a Través de Funciones**

De la Figura 1, se puede observar que si bien matemáticamente una función gráfica, puede estar en cualquier cuadrante, para fines de negocios tiene mayor interés el primer cuadrante, ya que en este, el eje de las abscisas por lo general nos representa el número de artículos o bien las fechas, y el eje de las ordenadas nos representa por lo general la cantidad de dinero, y en ambos casos es de mayor interés artículos o fechas positivas y cantidad de dinero también positivo.



$$f(x) = -x^2 + 6x + 2 \quad \text{con Dominio de: } [-0.2, 3.2]$$

$$f'(x) = -2x + 6$$

168  
 169  
 170  
 171  
 172  
 173  
 174  
 175

**Fig. (2), Comportamiento Económico de la Oferta**

De la Figura 2, nos podemos dar cuenta que a mayor precio, los fabricantes van a querer producir mayor cantidad de artículos, y que el comportamiento de la función para “x”, número de artículos, se comporta cómo la derivada nos lo está mostrando, ya que la derivada es el comportamiento de la función en todos sus puntos y para demostrarlo lo podemos ver en las tablas de la Figura 3.

**Función:**

$$f(x) = -x^2 + 6x + 2$$

con Dominio de:  $[-0.2, 3.2]$

x	f(x)
0	2
1	7
2	10
3	11

**Derivada:**

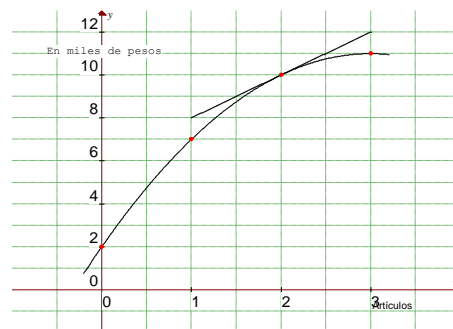
$$f'(x) = -2x + 6$$

x	f'(x)
0	6
1	4
2	2
3	0

**Fig. (3), Comportamiento de la Oferta para “x” Artículos**

De las tablas de la Figura 3, podemos observar que por un lado se localizan los puntos de la función, para valores del dominio de la función que derivando y sustituyendo en la derivada de la función, los valores de “x”, lo que se encuentra en la derivada es el valor de la pendiente de la función en dichos valores de “x”, siendo este valor el comportamiento de la función cuando se producen éste mismo número de artículos para la oferta.

**Comportamiento de la Oferta para “x = 2”  
Número de Artículos**

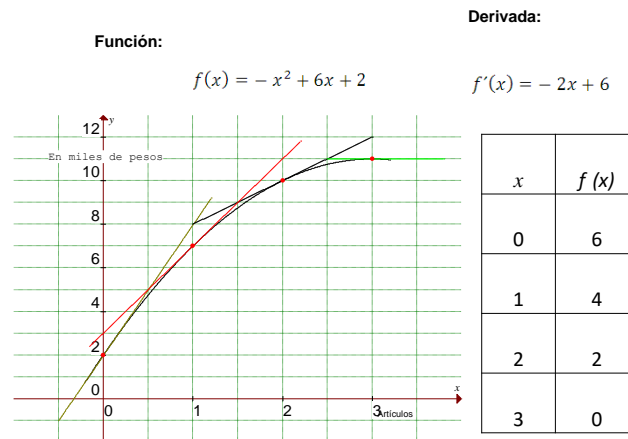


$$y = m(x - x_1) + y_1 \quad y = 2(x - 2) + 10$$

$$P(2,10) \quad m = 2 \quad y = 2x + 6$$

**Fig. (4), Comportamiento de la Oferta para “x = 2”  
Número de Artículos**

En la Figura 4, se muestra el comportamiento cuando se producen 2 artículos, el 2 puede representarnos: cientos, miles o cualquier otra cantidad a escala del número de artículos, lo mismo los valores del eje de las ordenadas, cualquier cantidad de dinero, pero respetando siempre una escala.



**Fig. (5), Comportamiento de la Oferta para algunos valores de “x” Número de Artículos**

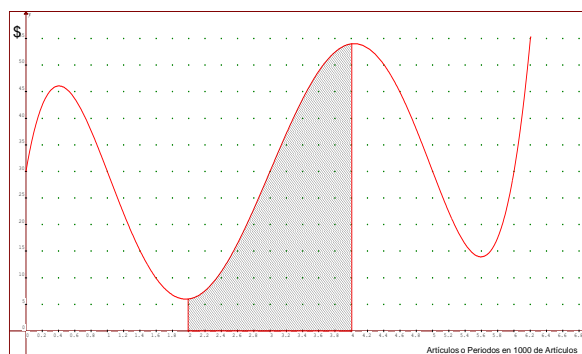
197  
198  
199  
200  
201  
202  
203  
204  
205  
206  
207  
208  
209  
210  
211

La Figura 5, nos representa el comportamiento de la oferta para varios valores de “x”, y podemos encontrar el valor del comportamiento de la función para cualquier número de artículos, siguiendo el mismo procedimiento.

### 5. Aplicaciones del Análisis Matemático en el Cálculo Integral

También el cálculo integral tiene un gran número de aplicaciones en los negocios, el análisis matemático tomando en cuenta que la integral es el área bajo la curva, por ejemplo, cuando las curvas son el comportamiento de: los costos, de la utilidad, de los ingresos, de los egresos, entre otras aplicaciones. De donde si necesitamos los costos entre dos fechas, o bien producir entre cierta cantidad de número de artículos, esto se puede realizar con la integral definida de la función entre esos dos valores.

Cálculo Integral, aplicado a una Función Económica.



**Fig. (6), Cálculo Integral aplicado a una Función Económica**

212  
213  
214  
215  
216  
217  
218

La Figura 6, nos señala el ejemplo de qué teniendo la función de un comportamiento económico, calculando el área sombreada entre dos valores bien sea entre dos cantidades de artículos, o bien entre dos fechas, el resultado de esa área definida nos resulta el total del dinero.



219 **4. Conclusiones**

220 Este trabajo logro el objetivo, de qué el análisis matemático tiene grandes aplicaciones  
221 a la ingeniería y en particular en los negocios, despertar el interés en los estudiantes  
222 de qué el análisis matemático, no solo es la continuación del álgebra, sino qué también  
223 tiene aplicaciones en la vida diaria, y qué en ciertos momentos de la vida estamos  
224 involucrados en los negocios, sobresale que las mejores decisiones se pueden tomar  
225 con un análisis matemático.

226

227 **5. Bibliografía**

228 Brousseau, G. (1988). *Le contrat didactique: le milieu. Recherches en Didactique des*  
229 *Mathématiques.*

230 Chevallard, Y. (1995). *La transposición Didáctica.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

231 Cantoral, R. y Montiel G. *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático,* Pearson  
232 Educación de México, 2001.

233 Cantoral, R. (2000). *El Futuro del Cálculo Infinitesimal* Grupo Editorial Iberoamérica.

234 Dolores, C. (1999). *Una Introducción a la Derivada a través de la Variación,* Colección  
235 Cuadernos Didácticos, vol. 6, Grupo Editorial Iberoamérica.

236 Douady, R. (1996). Ingeniería Didáctica y Evolución de la Relación con el Saber de las  
237 Matemáticas de Collège-Secondé. (P. Ferreiras-Soto, Trad.). En: *Enseñanza de las*  
238 *Matemáticas: Relaciones entre Saberes, Programas y Prácticas.* Francia: Topiques éditions.  
239 Publicaciones de IREM.

240 Ferrari, M. (2001), “*Una visión socio-epistemológica. Estudio de la función logaritmo*”, tesis de  
241 maestría CINVESTAV, IPN, 2001.

# INCLUSIÓN DE DIVERSAS FORMAS DE NOTACIÓN EN ELECTROMAGNETISMO Y MÉTODOS MATEMÁTICOS

José M. Rivera Rebolledo\*, <sup>1</sup>Albino Hernández Galeana<sup>1</sup> y Ricardo Gaitán Lozano<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Física y Matemáticas, Departamento de Física, Instituto Politécnico Nacional, edif. 9, U. P. Adolfo López Mateos, 07738 Lindavista, Ciudad de México.

<sup>2</sup> Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. Carretera Cuautitlán Teoloyucan Km 2.5. Cuautitlán Izcalli Estado de México. C.P. 54714.

ID-POSM060

## Resumen

En este trabajo mostramos algunas variantes en la notación en el tratamiento de problemas de electromagnetismo y métodos matemáticos, las cuales simplifican las expresiones haciéndolas menos tediosas, facilitando así el buen avance en los desarrollos y evitando fórmulas innecesarias.

**Palabras clave:** notación\_1, problemas\_2, electromagnetismo\_3. Métodos matemáticos\_4.

## 1. Introducción

Durante el estudio de diversos temas de la física y las matemáticas, regularmente nos encontramos con desarrollos en los cuales ciertos términos de las expresiones y fórmulas llegan a ser muy repetitivos y por demás tediosos, dándonos cuenta en un vistazo más atento que resultan además innecesarios al no aportar nada relevante, por lo cual si los suprimimos no nos perdemos de nada importante en la materia, ni decir que pueda constituir un aprendizaje o algo innovador. En este trabajo hemos tomado algunos problemas de electromagnetismo y métodos matemáticos que nos han parecido representativos en relación a que nos permiten utilizar la notación que se desea incluir como alternativa de las expresiones.

## 2. Metodología o desarrollo

### 2.1 Subtema

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: riverareb7@gmail.com

35 El el problema 9.13 Reitz, nos dice que se tiene un alambre muy largo y  
 36 rectilíneo, y otro en forma de rectángulo de ancho  $h$  y largo  $d$ , vemos que lo  
 37 anterior también se puede expresar por  $l \gg 1$  y  $(h, d)$ , respectivamente.

38 El prob. 2.19 ib, donde se pide encontrar el momento cuadrupolar eléctrico  $Q_{ij}$ , se  
 39 procede como sigue:

$$40 \quad Q_{ij} = \int (3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(r')dV', \rho' = q \delta(r'), \quad (1)$$

$$41 \quad \frac{1}{q}Q_{xx} = \int (3x'^2 - r'^2)[-2\delta(r') + \delta(z' - l) + \delta(z' + l)]dV', (2)$$

$$42 \quad \int (2x'^2 - y'^2 - z'^2)[-2\delta(r') + \delta(z' - l) + \delta(z' + l)]dV', (3)$$

$$43 \quad \delta(z' - l) = \delta(z' - l, x', y'), \quad (4)$$

$$44 \quad \frac{1}{q}Q_{xx} = -2(0) - l^2 - l^2 = -2l^2, Q_{xx} = -2ql^2, (5)$$

45 Aquí esencialmente en la integral se factoriza el término cuadrático en las coordenadas  
 46 y las  $\delta$ 's en lugar de escribir las integrales por separado.

47 En el problema 3, Resnick, una espira rectangular se mueve en un campo magnético  
 48  $B$  uniforme tal que la fem inducida  $\varepsilon$  es cero. Describa formas de movimiento. De esta  
 49 condición:

$$50 \quad \varepsilon = \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \varphi = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = B A \cos\theta = cte., (6)$$

$$51 \quad \therefore \cos\theta = cte., \quad (7)$$

52 por lo que los tipos de movimiento de la espira son:

53  $\theta^\circ$        $\mathbf{B}, \hat{\mathbf{n}}$       *movimiento espira*

54 0          //          *traslación // a  $\mathbf{B}$ ,* (8)

55 90         $\perp$         *rotación alred. de  $\mathbf{B}$ ,* (9)

56 donde los símbolos de paralelismo y perpendicularidad abrevian justo el uso de estas  
 57 expresiones.

58 En el problema 2 de Reitz, en dos alambres conductores de separación transversal  $d$   
 59 con  $(l \gg 1, i_1, i_2)$ , la fuerza entre dada está dada por:

$$60 \quad \mathbf{F} = \alpha \int \frac{1}{x^3} dl_1 dl_2 \mathbf{x}, \alpha = \alpha \frac{i_1 i_2}{c^2}, \quad (11)$$

61 siendo  $dl_{1,2}$  el elemento de longitud respectivo y  $x$  su separación subtendiendo un  
 62 ángulo  $\theta$  con  $l$ . Aquí es posible usar la notación:

$$63 \quad (c, s) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), \quad (12)$$

64 tal que

$$65 \quad (F_x, F_y) = \int \frac{1}{x^2} (c, s) dl_1 dl_2, \quad (13)$$

$$66 \quad (c, s) = (l_1, d) \frac{1}{\gamma}, \gamma^2 = d^2 + l_1^2 = x^2, \quad (14)$$

$$67 \quad \frac{1}{x^2} (c, s) = \frac{1}{\gamma^3} (l_1, d), \quad (15)$$

68 Así:

$$69 \quad F_x \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^3} l_1 dl_1 = 0, \quad (16)$$

70 en donde es innecesario conservar el factor constante cuando de antemano  
 71 sabemos que la integral será cero.

72 En el problema 2.10 de Mathews referente a los números de Euler  $E_n$  se encuentran  
 73 expresiones tales como

$$74 \quad \sum_n \gamma_{nj} = 0, \quad j > 0, \quad (17)$$

$$75 \quad \gamma_{nj} = \frac{(-1)^n}{(2n)!(j-2n)!} [(i)^{j-n} + (-i)^{j-n}] E_{2n}, \quad (18)$$

$$76 \quad 2n + k = j, \quad \text{o} \quad 2n = j - k, \quad \therefore k = 0 \text{ y } n_{\max} = \frac{1}{2}j, (19a, b) - (20a, b)$$

77 
$$\therefore \sum_0^{\frac{1}{2}j} \gamma_{nj} = 0, \quad \gamma_{nj}, \quad (21)$$

78 Sean en (18):

79 
$$2n = m, \quad o \quad n_{max} = \frac{1}{2}m_{max} = \frac{1}{2}j \quad \therefore m_{max} = j, (22)$$

80 Y en (21);

81 
$$\sum_{m=0}^j \gamma_{mj} = 0, \quad \gamma_{nj}, \quad (23)$$

82

83 En las expresiones (18-23) vemos que se puede manejar con mayor facilidad al  
 84 término dado por la ecuación (18) utilizando su forma abreviada  $\gamma_{nj}$ .

85 En el tema de tensores [4] , sea

86 
$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad (24)$$

87 Tal que

88 
$$\mathbf{r}(u_i) \rightarrow d\mathbf{r} = (\partial_{u_i}\mathbf{r}) du_i = \alpha_i du_i, \quad \alpha_i \equiv \partial_{u_i}\mathbf{r}, \quad (25 - 26)$$

89

90 
$$\therefore d\mathbf{r} = \alpha_p du_p, \quad (27)$$

91 
$$\alpha_p \cdot \alpha_q = g_{pq}, \quad \text{coefs. métricos}, \quad (28)$$

92 Sea

93 
$$x = x(x') \rightarrow dx^j = \alpha_k^j dx'^k, \quad cv, (29)$$

94 
$$cv = \text{covariante}, \quad y \quad \alpha_k^j \equiv \frac{\partial x^j}{\partial x'^k}, \quad x \rightarrow x', \quad (30)$$

95 y

96 
$$x' = x'(x) \rightarrow dx'^j = \beta_k^j dx^k, \quad ctv, \quad (31)$$

97 
$$ctv = \text{contravariante}, \quad y \beta_k^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^k}, \quad x \leftarrow x', (32)$$

98 con

99 
$$\alpha_k^j \beta_k^j = 1, \quad (33)$$

100 Así,

101 
$$a'^j = \alpha_k^j a^k, \quad ctv, \quad y \quad b'^j = \beta_k^j b^k, \quad ctv., \quad (34 - 35)$$

102 Sea

103 
$$\varphi' = \varphi, \text{escalar}, \quad (36)$$

104 
$$\rightarrow \frac{\partial \varphi' [x'(x)]}{\partial x'^k} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x^j} \alpha_k^j = \alpha_k^j \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}, \quad ctv, (37)$$

105 o

106 
$$\varphi'_{,k} = \alpha_k^j \varphi_{,j}, \quad ctv, \quad k \rightarrow j (38)$$

107 Similarmente,

108 
$$\frac{dx'^j}{dt} = \beta_k^j \frac{dx^k}{dt}, \quad o \quad v'^j = \beta_k^j v^k, \quad ctv. (39)$$

109

#### 110 4. Conclusiones

111

112 De este trabajo podemos concluir esencialmente que: 1) es importante la introducción  
113 de nuevas formas de notación en los desarrollos de los diferentes temas que se  
114 abordan en física y matemáticas, 2) el uso de estas herramientas adicionales nos  
115 permite abreviar trabajo e ilustra de una manera más clara lo que se pretende exponer,  
116 y 3) con lo anterior es posible lograr, además de la simplicidad, que se rescaten las  
117 ideas principales en aras de un mejor aprendizaje.

118

#### 119 Agradecimientos

120

121 José Manuel Rivera Rebolledo y Albino Hernández Galeana agradecen apoyo  
122 económico al Sistema Nacional de Investigadores, SNI, México, a la Comisión de  
123 Fomento de Actividades Académica del IPN, COFAA-IPN y al Programa de Estímulos  
124 al Desempeño Académico del IPN, PEDD-IPN. Albino Hernández Galeana agradece  
125 además apoyo económico al Programa Institucional de Formación de Investigadores,  
126 PIFI. Ricardo Gaitán Lozano agradece apoyo económico al Sistema Nacional de  
127 Investigadores, SNI, México.

128

## 129 5. Índice de referencias

130

131 [1] Reitz, J. R, Milford, F. J. &Christy, R. W. (1970). *Fundamentos de la teoría*  
132 *electromagnética*. México: Addison, Wesley Iberoamericana.

133 [2] Halliday, D., Resnick, R. &Walker, J. *Fundamentals of Physics*, 8<sup>th</sup> Edition,

134 <http://librosysolucionarios.net>

135 [3] Mathews, J. &Walker, R. L. (1973). *Mathematical Methods of Physic.*,2nd. Ed.  
136 Menlo Park, California, USA: Addison Wesley.

137 [4] Spiegel, M. R., Lipschutz, S., &Spellman, D. *Análisis Vectorial*, 2a. ed., USA:  
138 Schaum.

# GAUSS Y LA MEDIA ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA PARA EL CÁLCULO DE NÚMERO $\pi$

Hernández Morgado Belem<sup>\*1</sup>, Pineda Becerril Miguel de Nazareth<sup>2</sup>, Garibay Bermúdez Juan Rafael<sup>3</sup>, Ramírez Montes Pedro Ivan<sup>4</sup>  
<sup>1,2,3,4</sup> Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Universidad Nacional Autónoma de México. Carretera. Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5, San Sebastián Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx.

ID-POSM061

## Resumen

En este trabajo se propone una secuencia de actividades que comienza con el problema de la determinación del perímetro de la Lemniscata empleando la fórmula para la longitud de arco en coordenadas polares, siguiendo el camino trasado hace aproximadamente 230 años por el famoso matemático Carl Gauss. El problema permite plantear un procedimiento que permite calcular algunas integrales elípticas sin requerir de conceptos avanzados de cálculo, mediante el uso de la llamada media aritmético-geométrica, que puede utilizarse posteriormente para obtener una aproximación del número  $\pi$ , la secuencia didáctica permite poner en un contexto muy concreto la conexión entre diversas áreas de la matemática, se propone el uso del software matemático Maple para llevar a cabo todas las manipulaciones y cálculos de una manera sencilla.

**Palabras clave:**  $\pi$ , integral, Gauss, media, longitud, arco.

## 1. Introducción

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) proclamó que el 14 de marzo de cada año sea celebrado el “Día Internacional de las Matemáticas”. La Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) a través del Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM (SUMEM) organizó desde el 2016 en el día de  $\pi$  (“SUMEM”, 2020). El número  $\pi$  representa la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro, el uso de la letra griega  $\pi$  para representar esta relación fue popularizada por el matemático y físico suizo Leonhard Euler (Arndt y Haenel, 2001). Un valor para el número  $\pi$  con 40 dígitos, es suficiente para calcular el perímetro de la vía láctea con un error menor a el diámetro de un protón, este nivel de precisión fue conseguido ya desde comienzos del siglo XVII por el matemático germano-neerlandés Ludolph van Ceulen (Bailey *et al.*, 1997).

### 1.1 Número $\pi$ como parámetro de referencia para supercomputadoras

\*<sup>1</sup>Autor para la correspondencia. E-mail: belemhernandezm@gmail.com Tel. 5532246470.



39 El cálculo algunos billones de cifras decimales de  $\pi$  requiere que billones de  
40 operaciones de cómputo que deben realizarse sin errores, este nivel de desempeño  
41 debe mantenerse durante meses, por lo cual este cálculo permite comprobar la  
42 idoneidad en la selección e integración de software y hardware de una  
43 supercomputadora. El récord actual lo tiene un equipo de la Universidad de Ciencias  
44 Aplicadas de los Grisones (Fachhochschule Graubünden) en Suiza que luego de 108  
45 días de cálculo anunciaron el 14 de agosto de 2021 su resultado con más de 62  
46 billones de posiciones decimales de  $\pi$  (Keller, *et al.*, 2021).

47 1.3 El método de Gauss para el cálculo de la constante  $\pi$ .

48 En 1976 los investigadores Richard P. Brent y Eugene Salamin, publicaron de manera  
49 independiente un método que permite calcular millones de dígitos del número  $\pi$  de  
50 manera eficiente, dicho método había permanecido oculto 170 años en las notas del  
51 célebre matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

52 En libros de texto de cálculo es común que se presente casos como el perímetro de la  
53 elipse como ejemplo de integrales que no puede resolverse usando los métodos  
54 convencionales de cálculo de una variable. A menudo junto con dicho problema se  
55 presentan soluciones *ad hoc* para su cálculo (usando la combinación de diversos  
56 temas como el binomio de Newton, series de potencias, etc) (Thomas et al., 2015).

57 En este trabajo se presenta la fórmula de Gauss para el cálculo de  $\pi$  y el perímetro de  
58 la Lemniscata como un ejemplo de integral elíptica que, aunque no puede resolverse  
59 utilizando las técnicas estándar de cálculo, puede resolverse por medio de la AGM. Se  
60 propone el uso del software matemático Maple como herramienta para llevar a cabo  
61 las actividades propuestas.

## 62 2. Desarrollo

### 63 2.1 La media Aritmético-Geométrica

64 La AGM como su nombre lo indica es una media entre dos valores, puede considerarse  
65 como el límite al cual dos series convergen. Para dos números positivos puede  
66 obtenerse una aproximación de manera iterativa Ecs. (1) - (3).

$$\text{si } a_0 = x_1, \quad b_0 = x_2 \quad \text{Ecuación 1.}$$

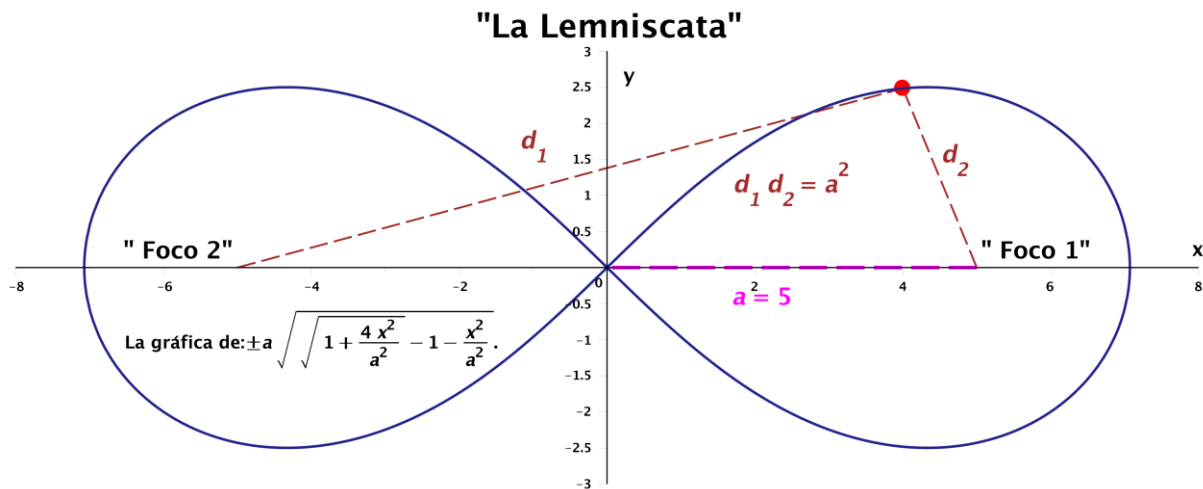
$$\text{para } k = 0, 1, 2, \dots, \quad a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad b_{k+1} = \sqrt{a_k b_k} \quad \text{Ecuación 2.}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{k+1} = AGM(x_1, x_2) \quad \text{Ecuación 3.}$$

67 El procedimiento implica calcular la media aritmética y la media geométrica para dos  
 68 números, con ese par de números nuevos se obtienen nuevas medias aritméticas y  
 69 geométricas, este proceso se repite hasta que se alcanza la convergencia deseada.

70 2.2 Perímetro de una lemniscata

71 La curva denominada como la lemniscata fue descrita por Jacob Bernoulli, está  
 72 definida a partir de dos puntos (denominados focos) separados a una distancia  $2a$ , de  
 73 manera que el producto de la distancia de cualquiera de los puntos que componen la  
 74 curva hacia los focos es igual al valor de  $a$  elevado al cuadrado como se ilustra en la  
 75 Fig. (1).



76

77 **Figura 1. Una lemniscata con distancia entre focos de 10.**

78 En coordenadas polares la ecuación que describe la Lemniscata es:  $r^2 = p \cos(2\theta)$ . Para  
 79  $p = 1$ , el perímetro de la lemniscata puede calcularse con se muestra en las Ecs. (4) -  
 80 (6). Sin embargo, encontrar la función primitiva no es posible usando los métodos de  
 81 integración típicos de un curso de cálculo diferencial e integral de los primeros  
 82 semestres de universidad.

$$P = 4 * \int_0^{\pi/4} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = 4 * \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos(2\theta) + \left(\frac{-\text{sen}(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\right)^2} d\theta, \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{-\text{sen}(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \quad \text{Ecuación 4.}$$

$$P = 4 * \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos(2\theta) + \frac{\text{sen}^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}} d\theta = 4 * \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{\cos^2(2\theta) + \text{sen}^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}} d\theta \quad \text{Ecuación 5.}$$

$$P = 4 * \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec(2\theta)} d\theta \quad \text{Ecuación 6.}$$

83 La secuencia de actividades continua con la propuesta de tres cambios de variable  
 84 consecutivos dando como resultado las Ecs. (7) - (8). Usando el cambio de variable  
 85  $t = \tan(\theta)$  tenemos la siguiente integral:

$$P = 4 * \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt \quad \text{Ecuación 7.}$$

86 Mediante el cambio de variable  $t = \cos(\phi)$  tenemos la siguiente integral:

$$P = 4 * \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{2\cos^2(\phi) + \text{sen}^2(\phi)}} \quad \text{Ecuación 8.}$$

87 El perímetro de la Lemniscata puede calcularse como un caso particular de la integral  
 88 elíptica que se muestra en la Ec. (9),  $P = 4 * I(\sqrt{2}, 1)$ .

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2\cos^2(\phi) + b^2\text{sen}^2(\phi)}} \quad \text{Ecuación 9.}$$

89 2.2.1 Relación entre el perímetro de la Lemniscata y la AGM

90 La forma de la integral para el perímetro de la Lemniscata está relacionada con otros  
 91 problemas como el perímetro de la elipse (de donde toman su nombre las integrales  
 92 elípticas). Durante su estudio de la Lemniscata y derivado de sus trabajos previos en  
 93 la teoría de la AGM Gauss fue capaz de unir ambas áreas de las matemáticas, es muy  
 94 probable que Gauss conociera bien el desarrollo inicial de las integrales elípticas por  
 95 parte de Euler. El resultado más importante fue encontrar que dicha integral puede  
 96 evaluarse empleando la AGM.

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{(AGM(a, b))^2\cos^2(\phi) + (AGM(a, b))^2\text{sen}^2(\phi)}} = \frac{\pi}{2AGM(a, b)} \quad \text{Ecuación 10.}$$

97 Este resultado nos permite calcular el perímetro de una Lemniscata si se conoce el  
 98 valor para  $\pi$  con la precisión deseada. Empleando la Ec. (10). y Maple podemos

99 calcular el perímetro de la Lemniscata a 15 dígitos como  $P = 5.24411510858424$ .

100 2.3 El método de Gauss

101 Finalmente usando la relación previamente descubierta por Euler Ec. (11) y la serie  
 102 encontrada por Gauss Ec. (12) mediante la integral auxiliar  $L(a, b)$  Ec. (13) es posible  
 103 obtener la formula presentada en la Ec. (14) para calcular aproximaciones sucesivas  
 104 de  $\pi$ . La serie  $S$  se construye de las  $k$  iteraciones que ya fueron calculadas previamente  
 105 para obtener la AGM.

$$\frac{\pi}{4} = L(\sqrt{2}, 1) * I(\sqrt{2}, 1) = (1 - S)(I(\sqrt{2}, 1))^2 = (1 - S) \left( \frac{\pi}{2AGM(\sqrt{2}, 1)} \right)^2 \quad \text{Ecuación 11.}$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-1} c_k^2, \quad c_k = a_k^2 - b_k^2 \quad \text{Ecuación 12.}$$

$$L(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(\phi)}{\sqrt{a^2 \cos^2(\phi) + b^2 \sin^2(\phi)}} d\phi, \quad \text{Ecuación 13.}$$

$$\pi = \frac{(AGM(\sqrt{2}, 1))^2}{(1 - S)} \quad \text{Ecuación 14.}$$

106 En las Fig. (2)-(3) se presentan la salida del software matemático Maple para cuatro  
 107 iteraciones de la AMG y las aproximaciones respectivas de para  $\pi$ , que permiten  
 108 calcular 9 decimales correctos, esto representa un error relativo en el orden de las  
 109 billonésimas (0.000,000,000,007 %).

110

111

```

restart;
with(Typesetting) :
Digits := 15
(1)
a_0 := sqrt(2) : b_0 := 1 : a_1 := (a_0 + b_0) / 2 : a_k = evalf(a_1) : b_1 := (sqrt(a_0 * b_0)) : b_k
= evalf(b_1) : sqc_k := ((a_0)^2 - (b_0)^2) : Typeset(c_k^2) = evalf(sqc_k) : S_k := 2^(0 - 1)
· sqc_k : Typeset(S_k) = evalf(S_k)
a_k = 1.20710678118655
b_k = 1.18920711500272
c_k^2 = 1.
S_k = 0.5000000000000000
(2)
a_0 := 1.20710678118655 : b_0 := 1.18920711500272 : a_1 := (a_0 + b_0) / 2 : a_k = evalf(a_1) :
b_1 := (sqrt(a_0 * b_0)) : b_k = evalf(b_1) : sqc_{k+1} := ((a_0)^2 - (b_0)^2) : Typeset(c_{k+1}^2)
= evalf(sqc_{k+1}) : S_{k+1} := 2^(1 - 1) · sqc_{k+1} : Typeset(S_{k+1}) = evalf(S_{k+1})
a_k = 1.19815694809464
b_k = 1.19812352149312
c_{k+1}^2 = 0.04289321881346
S_{k+1} = 0.04289321881346
(3)
a_0 := 1.19815694809464 : b_0 := 1.19812352149312 : a_1 := (a_0 + b_0) / 2 : a_k = evalf(a_1) :
b_1 := (sqrt(a_0 * b_0)) : b_k = evalf(b_1) : sqc_{k+1} := ((a_0)^2 - (b_0)^2) : Typeset(c_{k+1}^2)
= evalf(sqc_{k+1}) : S_{k+1} := 2^(2 - 1) · sqc_{k+1} : Typeset(S_{k+1}) = evalf(S_{k+1})
a_k = 1.19814023479388
b_k = 1.19814023467731
c_{k+1}^2 = 0.00008009951239
S_{k+1} = 0.00016019902478
(4)

```

112

113

114

**Figura 2. Cálculo de las aproximaciones de la AGM y de los términos de la serie S usando el software matemático Maple.**

$$\begin{aligned}
 a_0 &:= 1.19814023479388 : b_0 := 1.19814023467731 : a_1 := \left( \frac{a_0 + b_0}{2} \right) : a_k = \text{evalf}(a_1); \\
 b_1 &:= \left( \sqrt{a_0 \cdot b_0} \right) : b_k = \text{evalf}(b_1); \text{sqc}_{k+1} := \left( (a_0)^2 - (b_0)^2 \right) : \text{Typeset}(c_{k+1}^2) \\
 &= \text{evalf}(\text{sqc}_{k+1}); S_{k+1} := 2^{3^{-1}} \cdot \text{sqc}_{k+1} : \text{Typeset}(S_{k+1}) = \text{evalf}(S_{k+1}) \\
 a_k &= 1.19814023473560 \\
 b_k &= 1.19814023473560 \\
 c_{k+1}^2 &= 2.7933 \cdot 10^{-10} \\
 S_{k+1} &= 1.11732 \cdot 10^{-9}
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\text{evalf}\left( \frac{(1.19814023473560)^2}{1 - .5} \right) = 2.871080044158 \tag{6}$$

$$\text{evalf}\left( \frac{(1.19814023473560)^2}{1 - (.5 + 0.04289321881346)} \right) = 3.140491633804 \tag{7}$$

$$\text{evalf}\left( \frac{(1.19814023473560)^2}{1 - (.5 + 0.04289321881346 + 0.00016019902478)} \right) = 3.141592645843 \tag{8}$$

$$\text{evalf}\left( \frac{(1.19814023473560)^2}{1 - (.5 + 0.04289321881346 + 0.00016019902478 + 0.00000000111732)} \right) = 3.14159265359000 \tag{9}$$

115

116

117

**Figura 3. Cálculo de las aproximaciones de la AGM y de los términos de la serie S y aproximación de  $\pi$  usando el software matemático Maple.**

### 118 3. Resultados y análisis

119 La secuencia de actividades mostrada parte del problema para determinar el perímetro  
 120 de la Lemniscata permitiendo la aplicación de conceptos de curvas paramétricas,  
 121 coordenadas polares y la fórmula para la longitud de arco de curvas polares, el ejemplo  
 122 enfrenta a los estudiantes con una integral que no es posible resolver empleando  
 123 métodos convencionales.

124 La actividad continúa proponiendo el uso consecutivo de cambios de variable,  
 125 obteniendo una expresión que puede evaluarse usando la AGM. La siguiente actividad  
 126 presenta el cálculo de la AGM aplicando conceptos como el límite, series, la media  
 127 geométrica y la media aritmética.

128 Finalmente puede presentarse la formula del método de Gauss para determinar  
129 aproximaciones del número  $\pi$ . En este trabajo se muestra como el software  
130 matemático Maple representa un vehículo adecuado para llevar a cabo las actividades  
131 propuestas.

132 De manera adicional podrían ampliarse las actividades para involucrar temas como  
133 por ejemplo la programación en Maple (o en otro entorno) o cálculos de punto flotante.

134

#### 135 **4. Conclusiones**

136 La secuencia de actividades propuesta en este trabajo es útil para mostrar la conexión  
137 entre diversas asignaturas, sirve como un ejemplo concreto para mostrar las  
138 limitaciones de los métodos de integración típicos de cursos de cálculo diferencial e  
139 integral, la secuencia permite integrar conceptos de diversas asignaturas para  
140 conseguir evaluar la integral, las actividades pueden desarrollarse enteramente  
141 empleando el software matemático Maple.

142

#### 143 **5. Referencias**

144 Arndt, J., & Haenel, C. (2001). Gauss and  $\pi$ . En J. Arndt & C. Haenel (Eds.). *Pi-*  
145 *Unleashed* (pp. 87-102). Berlin, Heidelberg: Springer.

146 Bailey, D. H., Plouffe, S. M., Borwein, P. B., & Borwein, J. M. (1997). The quest for PI.  
147 *The Mathematical Intelligencer*, 19(1), 50-56.

148 SUMEM. (2020, Mayo 23). Día de Pi. *Seminario Universitario para la Mejora de la*  
149 *Educación Matemática en la UNAM*. [En línea] Disponible en:  
150 <https://www.sumem.unam.mx/actividades/eventos/día-de-pi>

151 Keller, T., Ralf-Peter, M., Roelke, H., Schmid, M., Staudt, Y., & van Schie, A. (1997).  
152 (2021, Agosto 5). Pi-Challenge. *University of Applied Sciences of the Grisons*. [En  
153 línea] Disponible en: [https://www.fhgr.ch/en/specialist-areas/applied-future-](https://www.fhgr.ch/en/specialist-areas/applied-future-technologies/davis-centre/pi-challenge/)  
154 [technologies/davis-centre/pi-challenge/](https://www.fhgr.ch/en/specialist-areas/applied-future-technologies/davis-centre/pi-challenge/)

155 Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Heil, C. (2015). *Cálculo: Varias variables* (A.  
156 E. García Hernández, Trad.; Decimotercera edición). México: Pearson Educación.

# LONGITUD DE ARCO Y EL CÁLCULO DE $\pi$ , UNA PROPUESTA DE ACTIVIDAD USANDO TIC.

Ramírez Montes Pedro Ivan<sup>\*1</sup>, Aguilar Márquez Armando<sup>2</sup>, Ramírez Gonzalez J del Carmen<sup>3</sup>, García León Omar<sup>4</sup> y Hernández Castillo José Luz<sup>5</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas, Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, Universidad Nacional Autónoma de México. Carretera Cuautitlán-Teoloyucan Km. 2.5, San Sebastián Xhala, 54714 Cuautitlán Izcalli, Edo. de Méx.*

EN-POSM062

## Resumen

*El presente trabajo muestra el cálculo de la constante  $\pi$  usando el método de Arquímedes como un ejemplo de problema geométrico que puede plantearse de manera alternativa usando el concepto de longitud de arco de cálculo diferencial e integral. Se presentan una serie de actividades para el planteamiento y su solución mediante el uso de las TIC.*

**Palabras clave:** *cálculo, arco, integral,  $\pi$ , TIC, Maple.*

## 1. Introducción

### 1.1 $\pi$ a lo largo de la historia

La decimosexta letra del alfabeto griego,  $\pi$ , se emplea para representar una de las constantes matemáticas más conocidas, relaciona el perímetro con el radio de cualquier circunferencia. Éste número ha acompañado al hombre durante buena parte de la historia conocida, por ejemplo en la Biblia (año 550 antes de Cristo) en el Primer Libro de los Reyes, capítulo 7, versículo 23 cuando se habla del templo de Jerusalén construido por el rey Salomón, se describe una enorme piletta de forma circular (mar de bronce) con diez codos de diámetro por treinta codos de circunferencia  $\pi = 3$ , un codo puede variar entre 38.4 a 83.87 cm dependiendo del sistema de medida, aún antes de este registro se tiene conocimiento que alrededor del año 2000 antes de Cristo los babilonios empleaban un valor aproximado de  $\pi = 3.125$ , para la misma época o antes para los egipcios  $\pi = 3.16\dots$  (consideraban que un círculo de diámetro de 9 unidades tenía la misma área de un cuadrado de 8 unidades por lado) (Bailey et al., 1997), sin embargo, se considera que la primera persona en calcular sistemáticamente su valor fue el erudito griego Arquímedes de Siracusa (287 a. C. - 212 a. C.) por lo que este número también es conocido como la constante de Arquímedes.

El método de Arquímedes para estimar el valor  $\pi$  consiste en aproximar el perímetro de una circunferencia por medio de polígonos regulares. La aproximación mejora conforme se aumenta el número de lados, la cota superior e inferior del valor de  $\pi$  se obtiene usando polígonos inscritos o circunscritos a una misma circunferencia.

\*<sup>1</sup>Autor para la correspondencia. E-mail: pedroivan\_86@hotmail.com Tel. 5532246470.



43 1.2 Interés contemporáneo en el número  $\pi$ .

44 El cálculo de  $\pi$  se ha convertido en una prueba para poner a punto nubes de cómputo,  
45 en 2019 Emma Haruka Iwao informática en Google puso a prueba las capacidades de  
46 la nube de cómputo al calcular cerca de 30 billones de dígitos, labor que requirió 121  
47 días y un equivalente a 170 terabytes de almacenamiento (Iwao, 2019).

48 1.3 Curvas paramétricas y longitud de arco.

49 Una curva polar  $C$  en un plano cartesiano puede definirse como el conjunto de puntos  
50 donde las coordenadas  $x, y$  están asociadas con un vector de posición (Thomas et al.,  
51 2015). El módulo de dicho vector es una función del ángulo,  $\theta$ , entre el vector y el  
52 segmento positivo del eje  $x$ . En la parametrización  $\theta$  varía sobre un intervalo  $I$ , como  
53 se muestra en las Ecs. (1) - (3). Puede calcularse la longitud de dicha curva (longitud  
54 de arco) desde el ángulo  $\theta = \alpha$  hasta  $\theta = \beta$  empleando la integral que se muestra en la  
55 Ec. (4).

$$r = f(\theta) \quad \text{Ecuación 1.}$$

$$x = f(\theta) \cos \theta, y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta, \quad \text{Ecuación 2.}$$

$$C = \{(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \mid \theta \in I_2\} \quad \text{Ecuación 3.}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad \text{Ecuación 4.}$$

56 1.4 Integración de los conocimientos.

57 En la secuencia de actividades descrita en este trabajo proponemos una actividad que  
58 permita calcular aproximaciones sucesivas del número  $\pi$ , empleando el método de  
59 Arquímedes, el objetivo de la secuencia es partir de un problema geométrico y mostrar  
60 su solución empleando diversos temas de cálculo diferencial e integral.

61 Como primera actividad se representan polígonos empleando sus ecuaciones polares,  
62 se grafican polígonos con cada vez más lados, para mostrar como el perímetro del  
63 polígono se aproxima al de la circunferencia. La siguiente actividad consiste en  
64 diferenciar la ecuación polar, para obtener la integral necesaria para el cálculo de la  
65 longitud de arco. Se presenta al estudiante con una curva que no es suave, cuya  
66 derivada no está definida en algunos puntos y cuya integral no puede determinarse  
67 usando las técnicas de integración tradicionales, surgiendo la necesidad de presentar  
68 métodos numéricos para la integración (Domínguez & Nieves, 2014). Finalmente se  
69 emplea el valor de la longitud del arco de la integral para obtener una aproximación  
70 del valor del número  $\pi$ .

71 La secuencia de actividades aquí propuestas permite presentar un problema  
 72 geométrico que el estudiante es capaz de resolver, pero que posibilita explorar  
 73 conceptos como longitud de arco, e integración numérica, se muestra como el software  
 74 matemático Maple puede constituirse como un ambiente idóneo para desarrollar las  
 75 actividades propuestas.

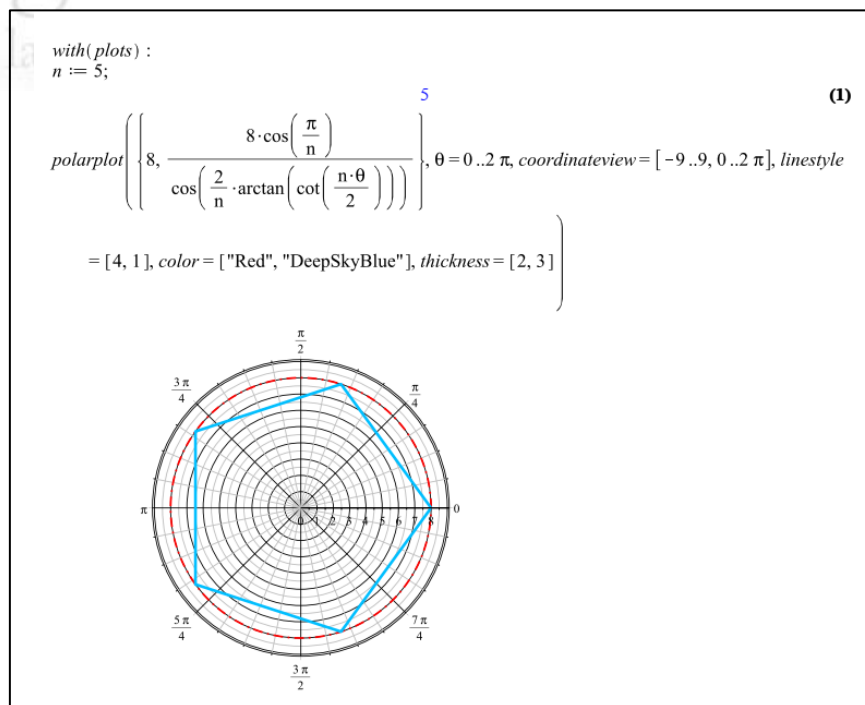
76 **2. Metodología o desarrollo**

77  
 78 **2.1 Círculos y polígono en coordenadas polares**

79 Las ecuaciones que describen a un polígono regular de  $n$  lados circunscritos a un  
 80 círculo de radio  $a$  en coordenadas polares (NJS, 2014) se muestran en las Ecs. (5) -  
 81 (6).  
 82

$$r_1 = a \quad \text{Ecuación 5.}$$

$$r_1 = a * \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) * \cos\left(\frac{2}{n} * \arctan\left(\cot\left(\frac{n * \theta}{2}\right)\right)\right) \quad \text{Ecuación 6.}$$



83  
 84 **Figura 1. Pentágono circunscrito a un círculo de radio 8, con centro común en el origen,**  
 85 **empleando la opción de gráfica polar en el paquete de graficas de Maple.**  
 86  
 87

88 Para graficar diversos polígonos directamente en coordenadas polares, se emplea el  
 89 paquete “plots” del software matemático Maple, mediante el comando “polarplot”, este  
 90 comando únicamente acepta funciones explicitas, en la Fig. (1) se muestra un ejemplo  
 91 para un pentágono circunscrito a un círculo de radio 8 con centro común en el origen.

92 En el caso que la curva sea descrita de manera implícita puede utilizarse el comando  
 93 “*implicitplot*” junto con las opciones “*coords = polar*” y “*axisxcoordinates = polar*”, el uso  
 94 de una variable para almacenar el número de lados permite modificar fácilmente la  
 95 gráfica polar. Conforme el polígono aumenta sus lados aproxima de mejor forma al  
 96 perímetro de la circunferencia como se muestra en la Fig. (2).  
 97

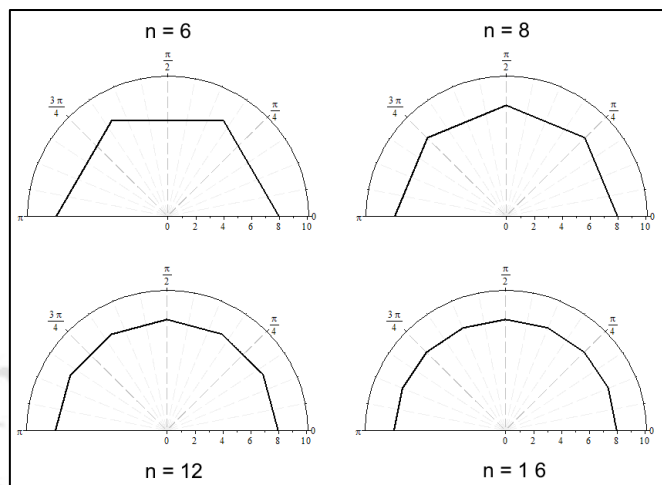


Figura 2. Polígonos regulares de 6, 8, 12, 16 lados.

98  
 99  
 100  
 101  
 102  
 103  
 104  
 105

## 2.1 Longitud de arco

Empleando las Ecs. (4) - (6) la derivada del radio con respecto al ángulo es:

$$\frac{dr_1}{d\theta} = -a * \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) * \sec\left(\frac{2}{n} * \arctan\left(\cot\left(\frac{n * \theta}{2}\right)\right)\right) * \tan\left(\frac{2}{n} * \arctan\left(\cot\left(\frac{n * \theta}{2}\right)\right)\right) \quad \text{Ecuación 7.}$$

106 Considerando la simetría de los polígonos regulares la integral para calcular el  
 107 perímetro deseado se muestra en la la Ec. (8).  
 108

$$P = n * \int_0^{\frac{2 * \pi}{n}} \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{dr_1}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad \text{Ecuación 8.}$$

109 Cuando analizamos el integrando se puede observar que la función no está definida  
 110 cuando el argumento de la función toma el valor de  $\pi$  o sus múltiplos enteros, por lo  
 111 cual no podemos obtener la integral definida (Thomas *et al.*, 2015), sin embargo, para  
 112 todos los casos puede determinarse el límite en cada uno de esos puntos de  
 113 discontinuidad lo que permite determinar la integral como una suma de integrales  
 114 impropias.

115 Considerando lo anterior la integral puede evaluarse empleando algún método de  
 116 integración numérica (Federico & Antonio, 2014), Maple implementa diversos métodos

117 numéricos por ejemplo empleando el método de NewtonCotes de grado  $n$ , en Maple  
118 están disponibles los comandos para usar los casos particulares de dicha formula  
119 (Trapezoidal para  $n = 1$ , Simpson para  $n = 2, 3$ , Boole para  $n = 4$ ).

120 Los comandos empleados para esta actividad son “restart” que permite borrar las  
121 variables y procedimientos definidos por el usuario para evitar errores con la  
122 asignación o de otro tipo, adicionalmente algunos parámetros internos de Maple  
123 también son restablecidos. El estudiante deberá cargar el paquete “Student”, tecleando  
124 with(Student), seguido de dos puntos o punto y coma, el uso de dos puntos permite  
125 silenciar la salida del programa, pero en el caso que se defina una variable o  
126 procedimiento u otro elemento este si quedara almacenado en la memoria. El  
127 estudiante también deberá cargar el subpaquete “NumericalAnalysis”, tecleando  
128 with(NumericalAnalysis), seguido de dos puntos o punto y coma. El uso de las teclas  
129 enter y shift de manera simultánea permiten añadir un renglón a la línea de comando  
130 que se esté escribiendo sin que se ejecute. Si se desea puede añadirse más de un  
131 comando por renglón o bien editar las características de texto de una secuencia de  
132 comandos, por ejemplo: negritas, tamaño de letra, alineación, espaciado, etc.  
133 permitiendo ajustar el formato a las necesidades particulares sin alterar la ejecución  
134 de los comandos.

135 La variable que controla el número de dígitos que Maple utiliza cuando ejecuta cálculos  
136 con números de punto flotante puede establecerse mediante la asignación “Digits:=  
137 15”, en este caso 15 corresponderá con el número de dígitos que se almacena en la  
138 mantisa luego de que las operaciones son realizadas, el valor por defecto es 10.

139 Para obtener una aproximación para el valor de la integral usando la regla de Simpson  
140 se emplea el comando “Quadrature”, los parámetros principales de este comando son  
141 la expresión algebraica para el integrando y el intervalo de integración, el integrando  
142 puede almacenarse en una variable, lo cual permite que ésta pueda modificarse más  
143 fácilmente según se requiera. Las opciones “method = simpson”, “partition = 10”,  
144 “output = information” del comando “Quadrature” permiten especificar el uso de la  
145 fórmula de Simpson para evaluar la integral, el número de subintervalos en los que se  
146 desea dividir el intervalo de integración y la salida del valor de la integral acompañado  
147 de una estimación del error relativo y absoluto.

148 La aproximación para el valor de  $\pi$  se muestra en la Ec. (9), donde  $P$  representa el  
149 perímetro del polígono regular de  $n$  lados, calculado con la integral,  $a$  representa el  
150 radio del círculo al cual dicho polígono está circunscrito.  
151

$$\pi \approx \frac{P}{2 * a} \quad \text{Ecuación 9.}$$

152 Finalmente puede obtenerse una estimación del valor de  $\pi$  empleando el comando  
153 “evalf” el cual devuelve el valor numérico de una función, en combinación con el

154 comando “int”, que devuelve el resultado de la integral empleando un método  
 155 numérico, cabe señalar que de esta forma el software Maple determina  
 156 automáticamente el método a emplear. La secuencia de comandos antes descrita se  
 157 muestra en Maple para un polígono regular de 60 lados en la Fig. (3) y para polígonos  
 158 de 6 y 600 lados en la Fig. (4).

```

poligono := (n, a) → a ·  $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{2}{n} \cdot \arctan\left(\cot\left(\frac{n \cdot \theta}{2}\right)\right)\right)}$  :
n := 60 : a := 8 :
f := poligono(n, a) :
g := -a · cos $\left(\frac{\pi}{n}\right)$  · sec $\left(\frac{2}{n} \cdot \arctan\left(\cot\left(\frac{n \cdot \theta}{2}\right)\right)\right)$  tan $\left(\frac{2}{n} \cdot \arctan\left(\cot\left(\frac{n \cdot \theta}{2}\right)\right)\right)$  :
Quadrature $\left(\sqrt{f^2 + g^2}, \theta = 0 .. \frac{2 \cdot \pi}{n}, method = simpson, partition = 10, output = information\right)$ 
INTEGRAL: Int(8*(cos(1/60*Pi)^2/sin(29/60*Pi+1/30*arccot(cot(30*theta)))^2+cos(1/60*Pi)^2*csc(29/60*Pi+1/30*arccot(cot(30*theta)))^2*cot(29/60*Pi+1/30*arccot(cot(30*theta)))^2)^(1/2),theta=0..1/30*Pi) = 0.8373753
APPROXIMATION METHOD: Simpson's Rule
----- INFORMATION TABLE -----
Approximate Value      Absolute Error      Relative
Error
      0.8373753      5.6325e-11      6.726e-09 %
-----
Number of Function Evaluations:      21

evalf $\left(\frac{n \cdot \left(\text{int}\left(\sqrt{f^2 + g^2}, \theta = 0 .. \left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right), numeric\right)\right)}{2 \cdot a}\right)$ 
3.14015737457664
(3)
    
```

159  
 160  
 161  
 162  
 163  
 164

**Figura 3. Cálculo del perímetro para un hexacontágono (representado como una curva polar) circunscrito a un círculo de radio 8, empleando el método de Simpson y la aproximación de  $\pi$  correspondiente, utilizando el software matemático Maple.**

```
restart; with(Student) : with(NumericalAnalysis) : Digits := 15 :
```

$$\text{poligono} := (n, a) \rightarrow a \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{2}{n} \cdot \arctan\left(\cot\left(\frac{n \cdot \theta}{2}\right)\right)\right)}$$

```
n := 6 : a := 8 :
```

```
f := poligono(n, a) :
```

$$g := -a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sec\left(\frac{2}{n} \cdot \arctan\left(\cot\left(\frac{n \cdot \theta}{2}\right)\right)\right) \tan\left(\frac{2}{n} \cdot \arctan\left(\cot\left(\frac{n \cdot \theta}{2}\right)\right)\right) :$$

```
Quadrature\left(\sqrt{f^2 + g^2}, \theta=0 .. \frac{2 \cdot \pi}{n}, method=simpson, partition=10, output=information\right)
```

```
INTEGRAL: Int(4*(3/sin(1/3*Pi+1/3*arccot(cot(3*theta)))^2+3*csc(1/3*Pi+1/3*arccot(cot(3*theta)))^2*cot(1/3*Pi+1/3*arccot(cot(3*theta)))^2)^(1/2), theta=0..1/3*Pi) = 8
```

```
APPROXIMATION METHOD: Simpson's Rule
```

```
----- INFORMATION TABLE -----
```

Approximate Value	Absolute Error	Relative Error
8.00001059	1.05933371e-05	0.0001324 %

```
Number of Function Evaluations: 21
```

$$\text{evalf}\left(\frac{n \cdot \int\left(\sqrt{f^2 + g^2}, \theta=0 .. \left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right), \text{numeric}\right)}{2 \cdot a}\right)$$

3.000000000000000

(1)

```
n := 600 : a := 8 :
```

```
f := poligono(n, a) :
```

$$g := -a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sec\left(\frac{2}{n} \cdot \arctan\left(\cot\left(\frac{n \cdot \theta}{2}\right)\right)\right) \tan\left(\frac{2}{n} \cdot \arctan\left(\cot\left(\frac{n \cdot \theta}{2}\right)\right)\right) :$$

```
Quadrature\left(\sqrt{f^2 + g^2}, \theta=0 .. \frac{2 \cdot \pi}{n}, method=simpson, partition=10, output=information\right)
```

```
INTEGRAL: Int(8*(cos(1/600*Pi)^2/sin(299/600*Pi+1/300*arccot(cot(300*theta)))^2+cos(1/600*Pi)^2*csc(299/600*Pi+1/300*arccot(cot(300*theta)))^2*cot(299/600*Pi+1/300*arccot(cot(300*theta)))^2)^(1/2), theta=0..1/300*Pi) = 0.0837754213
```

```
APPROXIMATION METHOD: Simpson's Rule
```

```
----- INFORMATION TABLE -----
```

Approximate Value	Absolute Error	Relative Error
0.0837754213	1e-16	1.194e-13 %

```
Number of Function Evaluations: 21
```

$$\text{evalf}\left(\frac{n \cdot \int\left(\sqrt{f^2 + g^2}, \theta=0 .. \left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right), \text{numeric}\right)}{2 \cdot a}\right)$$

3.14157829885176

(2)

Figura 4. Cálculo de aproximaciones del número  $\pi$  usando Maple.

### 167 3. Resultados y análisis

168 La secuencia de actividades mostrada permite a partir de un problema geométrico  
169 explorar el concepto de curva en coordenadas polares, la longitud de arco en  
170 coordenadas polares, el concepto de integrabilidad y presentar algún método de  
171 integración numérica, en este trabajo se muestra como el software matemático Maple  
172 representa un vehículo idóneo para llevar a cabo las actividades propuestas ya que  
173 implementa el uso de diferentes paquetes, comandos y opciones que permiten llevar  
174 acabo las actividades propuestas en este trabajo.

175 De manera adicional la secuencia de actividades también puede llevarse a cabo como  
176 parte de un curso de geometría únicamente, de manera adicional esta actividad puede  
177 ampliarse para incluir: límites, error, propagación del error, convergencia,  
178 programación en Maple (o en otro entorno) o cálculos de punto flotante.

### 179 4. Conclusiones

180 La secuencia de actividades propuesta en este trabajo es útil para presentar la  
181 formulación de un problema geométrico empleando las herramientas del cálculo  
182 diferencial e integral. Muestra claramente la importancia de la articulación de  
183 conocimientos de diversas asignaturas y sirve como un ejemplo concreto para  
184 presentar métodos de integración numérica, las actividades pueden desarrollarse por  
185 completo empleando el software matemático Maple.

186

### 187 5. Referencias

188 Bailey, D. H., Plouffe, S. M., Borwein, P. B., & Borwein, J. M. (1997). The quest for  $\pi$ .  
189 *The Mathematical Intelligencer*, 19(1), 50–56.

190 Dominguez Sanchez, F., & Nieves Hurtado, A. (2014). *Métodos Numéricos Aplicados*  
191 *a la Ingeniería* (4a, ed.). México: Grupo Editorial Patria.

192

193 Iwao, E. M. (2019, Marzo 14). Pi in the sky: Calculating a record-breaking 31.4 trillion  
194 digits of Archimedes' constant on Google Cloud. *Google Cloud*. [En línea] Disponible  
195 en: [https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-31-4-trillion-digits-of-](https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-31-4-trillion-digits-of-archimedes-constant-on-google-cloud)  
196 [archimedes-constant-on-google-cloud](https://cloud.google.com/blog/products/compute/calculating-31-4-trillion-digits-of-archimedes-constant-on-google-cloud)

197

198 NJS. (2014, Febrero 18). Geometry—Is there an equation to describe regular  
199 polygons?. *MathemaTIC Stack Exchange*. [En línea] Disponible en:  
200 [https://math.stackexchange.com/questions/41940/is-there-an-equation-to-describe-](https://math.stackexchange.com/questions/41940/is-there-an-equation-to-describe-regular-polygons)  
201 [regular-polygons](https://math.stackexchange.com/questions/41940/is-there-an-equation-to-describe-regular-polygons)

202

203 Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., & Heil, C. (2015). *Cálculo: Varias variables* (A.  
204 E. García Hernández, Trad.; Decimotercera edición). México: Pearson Educación.

# ENSEÑANZA EN LÍNEA: UNA REFLEXIÓN DIDÁCTICA PEDAGÓGICA

Gómez Castillo Manuel Odilón<sup>1</sup>, Angeles López Rebeca<sup>2</sup> y Vega Rodríguez Anakaren<sup>3</sup>  
Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo.

ID-POSM063

## Resumen

Ante las condiciones que actualmente se viven con el confinamiento provocado por la Covid-19 las escuelas que trabajaban de forma presencial tuvieron que adaptarse de forma abrupta a la educación a distancia utilizando herramientas digitales, dicha transición para el profesor no ha sido sencilla, es así como la formación docente en que apoye al profesor al manejo adecuado de las plataformas digitales es una prioridad, ya que nos solo debe manejar estas herramientas, sino que debe adaptar sus estrategias didácticas a las condiciones actuales, para que estas sean adecuadas para generar los aprendizajes esperados.

**Palabras clave:** Educación a distancia, modelo híbrido, plataforma office 365, diplomado, transición de presencial a en línea, formación docente.

## 1. Introducción

En marzo de 2020 tuvimos que confinarnos en nuestros hogares de forma abrupta, ya que las condiciones que se vivían en ese momento provocadas por el virus SARS-COV 2 así lo ameritaban, viéndose impactados muchos aspectos de nuestra vida, en particular si nos centramos en el rubro de la educación los docentes que regularmente impartíamos clases en sistemas presenciales tuvimos que adaptar nuestra docencia a las condiciones que se presentaban, las cuales generan un impacto muy fuerte y abrupto, misma situación que afecto a nuestros estudiantes, los cuales en su mayoría nunca habían tomado clases a distancia.

Es así como las estrategias didáctico-pedagógicas diseñadas y empleadas para buscar y generar aprendizajes en los alumnos tuvieron que ser modificadas y adaptadas a las herramientas tecnológicas existentes y accesibles a los docentes, aquí también jugo un papel importante la institución, dotando de plataformas educativas y licencias de diverso software el cual permitió a los docentes adaptar sus estrategias en busca de generar aprendizajes significativos.

<sup>2</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: rebeca.angeles@cch.unam.mx



## 41 2. Enseñanza en Línea

42

43 Debido a la COVID-19 niños, niñas, jóvenes y adultos dejaron de asistir a escuelas,  
44 universidades y otros centros educativos para proteger su salud, situación que de  
45 forma inmediata nos obligó a poner en marcha acciones para enfrentar el desafío de  
46 adaptarse al mundo digital e iniciar una enseñanza en línea.

47 Al no contar con un modelo definido para afrontar los retos de la enseñanza en línea,  
48 requirió de un proceso de adaptación para los docentes al involucrar herramientas  
49 tecnológicas, metodologías, pedagogías, así como la búsqueda de cursos de  
50 formación docente que le permitieran afrontar las nuevas dificultades.

51 En el grupo de trabajo Hipatia de Alejandría del Colegio de Ciencias y Humanidades  
52 Plantel Vallejo preocupados por esta situación nos dimos a la tarea de investigar e  
53 implementar cursos para el apoyo a docentes en la transición abrupta de lo presencial  
54 a lo en línea de un día para otro. Es así como se impartieron 8 cursos a profesores de  
55 diversas áreas del conocimiento y con diversas habilidades digitales. Los cursos  
56 abordaban de forma principal la plataforma office 365 y la herramienta de  
57 videollamadas de Zoom, esto debido a que todos los docentes cuentan con licencias  
58 de este software.

59

60 A partir de esta experiencia se analizó la utilidad de trabajar de forma más a fondo las  
61 aplicaciones de la plataforma, ya que en un curso de 20 horas no alcanzaba para que  
62 los profesores maduraran los aprendizajes vertidos en el curso y lograran desarrollar  
63 a través de estos la transición de sus estrategias didácticas que manejaban de forma  
64 presencial.

65

66 Por tal motivo se trabajó en el desarrollo de un diplomado que ayudara al profesor de  
67 cualquier área a desarrollar habilidades digitales, a conocer de forma más detallada  
68 las herramientas para poder así tener los conocimientos y experiencia necesaria para  
69 poder hacer una transición de sus estrategias didácticas presenciales a estrategias  
70 didácticas a distancia con el uso de herramientas digitales, es más lo que se buscaba  
71 es que el profesor reflexionara la utilidad de estas herramientas digitales y que en el  
72 momento de volver a regresar a la forma presencial, siguiera haciendo uso de estas  
73 herramientas digitales, llevándolo a un modelo híbrido, con el fin de potenciar el  
74 aprendizaje de los alumnos.

75

76 Es así como se diseñó y se impartió el Diplomado: “Herramientas tecnológicas de  
77 apoyo a la docencia, que ayudan a desarrollar una movilidad entre un modelo  
78 presencial, híbrido o en línea” conformado por siete módulos de aprendizaje que  
79 permitiera a los docentes conocer e implementar diferentes herramientas y estrategias  
80 didácticas en el desarrollo de sus cursos en línea durante el ciclo 2020-2021.

81

82 El contenido por modulo del diplomado se muestra en la Figura 1.

83

Módulo 1: Introducción al manejo de plataformas de trabajo en línea.

Módulo 2: Espacio de trabajo virtual (nube).

Módulo 3: Creación de materiales multimedia.

Módulo 4: Instrumentos de evaluación en línea.

Módulo 5: Plataformas educativas digitales.

Módulo 6: Creación de páginas web.

Módulo 7: Comunicación en videoconferencia y pizarra electrónica.

### Figura 1. Contenido temático

84  
85  
86  
87

El diplomado se trabajó completamente en línea y cada módulo constaba de 20 horas, de las cuales 10 eran de forma síncrona a través de Zoom y 10 de trabajo asíncrono, dando un total de 140 horas. El trabajo del diplomado fue muy enriquecedor, ya que se inscribieron un total de 75 profesores, concluyéndolo 65 profesores. Los profesores eran de todas las áreas del conocimiento y los trabajos que realizaron fueron muy interesantes y enriquecedores, además que el intercambio de ideas y estrategias y opiniones que se vertieron fueron de gran relevancia.

95  
96  
97  
98  
99  
100

Es así como logramos emplear una dinámica de trabajo que nos permitió reflexionar y conocer la percepción de los docentes, además como el diplomado se llevaba a la par del semestre muchos de estas estrategias didácticas se llevaban a la práctica de forma casi inmediata, ayudándonos a conocer las dificultades que presentaron los alumnos durante el proceso de enseñanza aprendizaje en su modalidad en línea.

101  
102  
103

#### 2.1 Percepción del docente sobre la enseñanza en línea

104  
105  
106  
107  
108  
109  
110  
111  
112  
113  
114  
115

Se tienen un cúmulo de evidencias del trabajo de los profesores en el diplomado, decidimos dar una pequeña muestra de estas evidencias, es así como en el desarrollo del Diplomado, módulo siete; consideramos importante reflexionar sobre las experiencias del docente, para ello se realizaron diversas actividades, en particular una lluvia de ideas contestando a la pregunta ¿Qué perdimos como profesores, en nuestra labor docente, al momento de entrar en confinamiento causado por la COVID-19 y con ayuda de la herramienta mentimeter los asistentes pudieron expresar con una palabra o frase su respuesta Figura 2. participando de forma interactiva en un trabajo colaborativo.

¿Qué perdimos como profesores, en nuestro labor docente, al momento de entrar en confinamiento causado por la COVID 19?

Mentimeter



Figura 2. Lluvia de ideas

116  
117  
118  
119  
120  
121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
128  
129  
130  
131  
132

Un porcentaje importante de profesores considera que se ha perdido en nuestra labor, la interacción humana y visual, la socialización y la empatía, las emociones y participación de los alumnos, aspectos que se deben trabajar diariamente con el diseño de estrategias adecuadas con el uso de herramientas que motiven al alumno. Con el apoyo de la herramienta Forms de Microsoft se realizó un cuestionario que permitiera dar respuesta a diferentes preguntas de las que destacan:

- Nuevas formas de enseñanza Figura 3.
- Nuestros alumnos son nativos digitales, pero ¿crees que estén capacitados para aprender con la tecnología? ¿porqué? Figura 4.
- Consideras que debe cambiar el currículo y la visión de la escuela. Figura 5.

En esta nueva realidad que vivimos, ¿cómo piensas que se modificó la profesión docente? ¿Estamos preparados para afrontar las nuevas formas de enseñanza?

60 Respuestas

Considero que el uso de las TIC se había considerado de manera escalonada y fue adoptado por pocos docentes antes del confinamiento, por esta razón se puede considerar un cambio pedagógico en la forma de dar y recibir conocimientos. Hoy en día hubo un cambio radical en el proceso de enseñanza-aprendizaje y que sí se modificó no solo la profesión docente sino también la perspectiva y aprendizaje de los alumnos. Considero que ya existe una experiencia previa y que, como docentes, estamos mejor preparados para las clases a distancia.

Se modificó drásticamente. la gran mayoría no estaba preparado y tuvo muchas complicaciones sobre el manejo de la tecnología pero también sobre el cómo relacionarse con los estudiantes ante nuevas reglas. Evidentemente fue una atención de emergencia y pese a todo, considero que se hizo un gran esfuerzo por autoridades y docentes, al igual que alumnos y padres de familia.

A la gran mayoría nos tomó por sorpresa, no estábamos acostumbrados a usar la tecnología para comunicarnos, no sabíamos usar las plataformas, sobre la marcha y rápido tuvimos que aprender, en mi caso varias ocasiones los alumnos me apoyaron en el uso de la plataforma, todo se modificó, tuvimos que buscar la forma de darnos a entender, usando la pizarra, con videos, diapositivas, presentando pantalla y debemos estar preparados para afrontar nuevas formas de enseñanza.

Figura 3. Nuevas formas de enseñanza

133  
134  
135

Nuestros alumnos son nativos digitales, pero ¿crees que estén capacitados para aprender con la tecnología? ¿porqué?

60 Respuestas

Tiene la facilidad, más no todos, la entereza, y en muchos casos los recursos. Ellos han crecido dentro de un entorno digital, y lo asocian como un recurso, primariamente lúdico, secundariamente de auxilio a la consulta y terciariamente como un recurso pedagógico. Por lo que esto nos obliga a buscar que el recurso resulte hasta cierto punto "juguetón" y de fácil interacción pero que genere su interés y particularmente su aprendizaje.

Están capacitados más no formados. El alumno sabe hacer uso de dichas tecnologías pero no quiere decir esto que sepa cómo aprender a través de este recurso, y además tampoco lo están del todo por la sencilla razón que no todos los docentes lo están, ¿entonces, cómo guiar al alumno en el buen uso de las herramientas digitales si a veces ni el docente lo está? Y aclaro que no lo está por su mero gusto, son muchos los factores los que inciden en esta falta de formación.

Si bien es cierto que nuestros alumnos son nativos digitales, en ocasiones las habilidades tecnológicas que poseen no son empleadas de manera adecuada para el ámbito educativo quizás por desconocimiento o porque el ámbito educativo no se había preocupado tanto por estimular el uso de las tecnologías en el aula, ya que ahora estas herramientas no son un complemento para llevar a cabo de la tarea educativa sino que se convirtieron en protagonistas del proceso educativo de tal manera que es necesario trabajar con nuestros estudiantes en estos temas.

Que el alumno tenga conocimientos y habilidades tecnológicas es una gran ventaja ya que le será más fácil manejar las herramientas tecnológicas para obtener los aprendizajes esperados que marca el programa, herramientas como Excel, GeoGebra, etc. son de gran utilidad, cabe aclarar que el profesor como guía o mediador es necesario para que el alumno cumpla esos aprendizajes.

136  
137  
138  
139

Figura 4. ¿Nativos Digitales?

En esta forma de educación: ¿Trabajaste completo el currículum de tu asignatura?, o ¿trabajaste solo aprendizajes relevantes y significativos?

60 Respuestas

a) No, no pude completar el currículum, y si, solo trabajé con los aprendizajes más significativos de cada unidad. b) Definitivamente, creo que el currículum escolar deberá de modificarse, para adaptarse a las nuevas oportunidades de aprendizaje que se han evidenciado, deberá hacerse más dinámico y limitar el número de estudiantes por grupo entre otra muchas cosas también.

Trabajé solo los aprendizajes relevantes y significativos. Considero que dadas las circunstancias en las que nos encontramos, se debe tener una reformulación y adaptación al currículum tomando en cuenta las experiencias vividas en el último año y medio.

Trabaje solo aprendizajes relevantes y significativos, debido al tiempo e clases que se veía interrumpido por detalles tecnológicos, aunado al doble trabajo al adoptar dos plataformas para ayudar a los alumnos de escasos recursos.

140  
141  
142  
143

Figura 5. Cambios en el Currículo

De acuerdo con la CEPAL (2020) es preciso tomar una serie de decisiones y ajustes para determinar las priorizaciones curriculares y la contextualización necesaria para asegurar la pertinencia de los contenidos, aspectos que podemos observar que los profesores del colegio mencionan como acción necesaria ante la nueva normalidad.

2. 2 Educación en línea y educación presencial, experiencias desde la visión de los alumnos

144  
145  
146  
147  
148  
149  
150  
151  
152  
153  
154  
155  
156

Para poder hacer un análisis completo se solicitó el apoyo a los alumnos de sexto semestre (ya que ellos vivieron la mitad de su bachillerato de forma presencial y la mitad en línea) del colegio que pudieran compartir sus experiencias a través de un

157 vídeo Figura 6. donde expresaran la forma en la que percibieron la enseñanza en línea  
158 en comparación con la enseñanza presencial.



<https://www.youtube.com/watch?v=J11BC2H433w>



<https://www.youtube.com/watch?v=UDBxmTYtdwA>

159 **Figura 6. Participación de alumnos de sexto semestre**

160

161 En total participaron cerca de 300 alumnos y en su mayoría los estudiantes expresaron  
162 que las principales dificultades que enfrentaron son:

- 163
- 164 • Comparten el equipo de trabajo con otros integrantes de la familia.
  - 165 • Tienen dificultades para concentrarse porque se desarrollan otras actividades en casa.
  - 166 • Los profesores no desarrollaban clases dinámicas.
  - 167 • Consideran difícil la relación con el profesor a través del monitor y les impedía la comprensión de ciertos temas.
  - 168 • Inclínación al cumulo de tareas y actividades por parte de los profesores.
- 169

170

171 En general los alumnos también identifican diferentes aspectos que obstaculizan su  
172 aprendizaje y es necesario destacar que consideran que han aprendido en menor  
173 medida e incluso han olvidado lo que ya sabían.

174

### 175 **3. Resultados y análisis**

176

177 La enseñanza durante la pandemia permitió que en su mayoría los profesores  
178 desarrollarán habilidades digitales para el desarrollo de actividades y estrategias de  
179 enseñanza, sin embargo, al finalizar el Diplomado se realizaron las siguientes  
180 preguntas, ¿Las actividades se apegan a los principios del colegio y a su modelo  
181 educativo?, algunas de las respuestas obtenidas por los participantes se muestran en  
182 la Figura 7.

183

184

Desde su punto de vista ¿el tipo de actividades llevadas a distancia se apegan a los principios de Colegio y a su modelo educativo?

en definitiva si, todo depende del diseño que hagamos nosotros esperando siempre de los estudiantes su participación, activa, creatividad, compromiso y capacidad para resolver y proponer.

Como mencioné, no son las herramientas las que hacen que el proceso de enseñanza-aprendizaje se lleve a cabo de manera exitosa. Es la adaptación que hace el profesor con los recursos que tiene a su alrededor, objetos del entorno, un pizarrón, una PC. Los principios del colegio se pueden cumplir cuando el docente tiene la capacidad de adaptar las herramientas a la didáctica para cumplir los objetivos.

Considero que se logro el aprender a aprender pues los alumnos lograron los aprendizajes a pesar de las condiciones. El ser no estoy muy segura pues el impacto emocional debido al trabajo académico dejó a los alumnos un mal sabor de boca y mucho stress. Las actividades que en ocasiones realizar en equipos, se realizaron individualmente o con desventajas.

Personalmente intente apegarme a los principios del colegio, tuve algunas complicaciones para abarcar los contenidos, el trabajo, creo que llevar acabo los principios del colegio se puede lograr orientando las actividades.

185  
186  
187  
188  
189  
190  
191  
192  
193

Figura 7. Principios del colegio

El uso de las plataformas educativas generó un medio de comunicación idóneo para el profesor y los alumnos, pero estamos seguros de que la herramienta no realizará el proceso de aprendizaje por si sola, entonces resulta pertinente que el docente reflexione sobre el uso de la herramienta y su objetivo.

¿De qué manera incorporará en su práctica docente, las plataformas educativas, para lograr que los estudiantes sean autorreflexivos, críticos y se encuentren bien informados?

Emplear las plataformas como principal medio de comunicación y de intercambio de ideas puede ser un primer paso. Por otra parte, es importante que las plataformas utilizadas estén estructuradas de modo que incluyan un repertorio de recursos a los que los estudiantes puedan acudir y que la información disponible en ellas sea suficiente sin ser excesiva.

Desde el planteamiento mismo de la asignatura, donde se buscara que los alumnos, investiguen, expongan, debatan y generen sus propias actividades guiados por los contenidos y temáticas de la materia de educación física. Ya que cualquiera de las plataformas sirven como puentes de comunicación y de aprendizaje.

194  
195  
196  
197  
198  
199  
200  
201  
202  
203

Figura 8. Incorporación de plataformas educativas

En general el Diplomado conformado por 7 módulos resulto de gran interés para los profesores con un termino de 68 profesores en la formación de herramientas digitales que pudieron reflexionar sobre su didáctica pedagógica.

204

#### 205 **4. Conclusiones**

206

207 La educación ha sido un factor fundamental en la respuesta a la pandemia de COVID-  
208 19, el profesorado y alumnos debieron atender las demandas y de alguna forma  
209 asegurar buenas condiciones en el proceso de enseñanza aprendizaje.

210 Si bien como docentes reflexionamos sobre nuestra labor, consideramos importante la  
211 necesidad de la atención y actualización al currículo y al uso de las herramientas  
212 digitales en búsqueda del aprendizaje significativo y sobre todo la motivación de los  
213 alumnos, buscar alternativas que mantengan a nuestros alumnos cautivos e impactar  
214 de forma positiva en el índice de deserción escolar. Estamos seguros de que la  
215 implementación de herramientas digitales llegó para quedarse y el rol del docente  
216 consiste en diseñar las estrategias adecuadas con las orientaciones y metodologías  
217 pertinentes para el logro de los aprendizajes.

218

#### 219 **5. Índice de referencias**

220

##### 221 Libros

222

- CEPAL, N. (2020). *La educación en tiempos de la pandemia de COVID-19.*

# ENSEÑANZA Y EVALUACIÓN DEL CURSO DE CINÉTICA QUÍMICA IMPARTIDO EN LÍNEA UTILIZANDO LA HOJA DE CÁLCULO EXCEL

Yolanda Marina Vargas-Rodriguez<sup>1,\*</sup>, Adolfo Eduardo Obaya Valdivia<sup>2</sup> y Alvaro,  
Enrique Lima-Vargas<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> *Departamento de Ciencias Químicas. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán.  
Universidad Nacional Autónoma de México.*

*Av. Primero de Mayo S/N, Sta. María Guadalupe las Torres, 54740 Cuautitlán  
Izcalli, Méx.*

<sup>3</sup> *Universidad de Quintana Roo Campus Playa del Carmen.  
Av. Universidades, 77710 Playa del Carmen, Q.R.*

MEMORIAS DEL  
AP-POSM064

## Resumen

Con el objetivo de mejorar la comunicación y los aprendizajes en un curso de Físicoquímica V (Cinética Química y Catálisis) impartido en línea se utilizó la hoja de cálculo Excel como pizarra y/o cuaderno de notas, calculadora y graficadora. Además, se aplicaron diversas estrategias didácticas entre las que destacan el aprendizaje basado en equipos (ABE) y el aprendizaje basado en problemas (ABP). Adicionalmente, se aplicó una encuesta de satisfacción tipo Likert, respecto a las estrategias didácticas, comunicación verbal y escrita, herramientas utilizadas durante las sesiones en línea y el uso de la hoja de cálculo Excel. También, los estudiantes plasmaron sus comentarios respecto al desarrollo de las clases en línea. Como resultados se obtuvo que las estrategias didácticas que mayor satisfacción presentaron fueron el ABP y el ABE con 93.37% y en segundo lugar la explicación del profesor con la tableta y con la hoja de cálculo Excel con el 91.3 %. En cuanto a la comunicación del curso en línea entre profesor-estudiante y estudiante-estudiante el 91.3 % opinó que se encuentran totalmente o muy satisfechos y el 97.82 % de los estudiantes opinaron que se encuentran totalmente o muy satisfechos con el uso de la hoja de cálculo Excel en el curso en línea para comunicarse y mejorar los aprendizajes. En el grupo que constó originalmente de 52 estudiantes, 10 de ellos no se presentaron al curso, los 42 restantes entregaron actividades en diferente porcentaje y aprobó más del 93.75%. Se concluye que la hoja de cálculo Excel es una excelente herramienta para la comunicación en línea entre profesor-estudiante y estudiante-estudiante, además de que coadyuva al mejoramiento de los aprendizajes.

**Palabras clave:** Cinética Química, Estrategias didácticas, Excel, Curso en Línea, Evaluación, Likert.

## 1. Introducción

La asignatura, de físicoquímica V (Cinética Química y Catálisis), se imparte en el sexto semestre de la carrera de Química en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán de la Universidad Nacional Autónoma de México. Físicoquímica V consta

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: ymvargas@unam.mx. Tel. 55 56 23 19 99 ext. 39 441



44 de 6 créditos, por lo que se imparten 3 horas de teoría a la semana y 3 de  
45 laboratorio. Cabe hacer mención que el grupo consta regularmente de 50 estudiantes  
46  
47 y la teoría la imparte 1 profesor y el laboratorio lo imparten 5 profesores en grupos de  
48 10 estudiantes. Parte de los objetivos del curso es estudiar los modelos matemáticos  
49 a los que se ajusta la rapidez de las reacciones químicas, así como el cálculo de  
50 parámetros cinéticos y termodinámicos (Fisicoquímica V, 2022).

51  
52 Es importante mencionar que para mejorar los aprendizajes de las asignaturas en  
53 donde se ven estos temas, se han utilizado diversas estrategias didácticas como es  
54 el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) tanto de forma presencial (Obaya et al.,  
55 2018), como en línea (Vargas-Rodríguez et al., 2020). Además, se ha encontrado que  
56 la estrategia del Aprendizaje Basado en Equipos (ABE) genera una diferencia  
57 positiva en las actitudes de los estudiantes (Naughton et al., 2020). Por otro lado,  
58 desde que iniciaron las clases en línea existe la problemática de la comunicación  
59 efectiva tanto verbal como escrita, entre profesor-estudiante y estudiante-estudiante,  
60 lo que impide un mejoramiento de los aprendizajes (Vargas-Rodríguez et al., 2021).

61  
62 En este trabajo se presentan los resultados de una encuesta de satisfacción de un  
63 curso en línea de Fisicoquímica V, en el que se utilizan diversas estrategias  
64 didácticas, y se utilizó la hoja de cálculo Excel como pizarra o cuaderno de notas,  
65 calculadora y graficadora para el desarrollo de actividades didácticas individuales y  
66 grupales.

## 67 68 **2. Metodología o desarrollo**

### 69 70 **2.1 Herramientas**

71  
72 El curso se impartió en línea durante el semestre de septiembre a enero de 2021. En  
73 un grupo de Fisicoquímica V, de la carrera de Química de la Facultad de Estudios  
74 Superiores Cuautitlán de la Universidad Nacional Autónoma de México. El grupo  
75 estuvo conformado por 52 estudiantes, 34 hombres y 18 mujeres, con edades entre  
76 20-21 años. La clase se llevó a cabo los martes de 7:00-10:00 h de forma sincrónica  
77 a través de la plataforma de videoconferencias Zoom.

78  
79 Para la explicación de la teoría, así como las deducciones matemáticas el profesor  
80 utilizó como herramienta una tableta Wacom. Para los ejercicios, se utilizó la hoja de  
81 cálculo Excel, en donde, se escribieron los textos de los problemas, se realizaron los  
82 planteamientos de estos, así como los cálculos matemáticos y los gráficos  
83 correspondientes para la obtención de los parámetros cinéticos de las reacciones  
84 químicas. Para el registro de actividades y exámenes se utilizó Classroom y para  
85 compartir información adicional durante las sesiones sincrónicas se utilizó WhatsApp.

86

## 87 2.2 Actividades y estrategias didácticas

88

89 En las sesiones de teoría se utilizaron siete estrategias didácticas: 1.Explicación de  
 90 la teoría con tableta, 2.Ejemplos realizados por el profesor, 3.Ejercicios realizados  
 91 por los estudiantes individualmente de forma sincrónica, 4.Trabajo en equipo de  
 92 forma sincrónica,5.Tareas individuales,6.Tareas en equipo en forma asincrónica  
 93 y7.Aprendizaje Basado en Problemas. Además, de dos exámenes. Para trabajar en  
 94 equipos de forma sincrónica se generaron 10 salas, a las que el profesor ingresó en  
 95 cada una de ellas para dar retroalimentación. Cabe hacer mención que las  
 96 estrategias 2-7, así como los exámenes se trabajaron en la hoja de cálculo Excel.

97

## 98 2.3. Evaluaciones y encuesta de satisfacción

99

100 Las evaluaciones fueron sumativas, laboratorio, las actividades (ejercicios de clase y  
 101 tareas y exámenes. Finalmente, se les solicitó a los estudiantes que llenaran una  
 102 encuesta de satisfacción tipo Likert (totalmente satisfecho, muy satisfecho, neutral,  
 103 poco satisfecho y nada satisfecho) a través de un formulario de *Google Forms*.

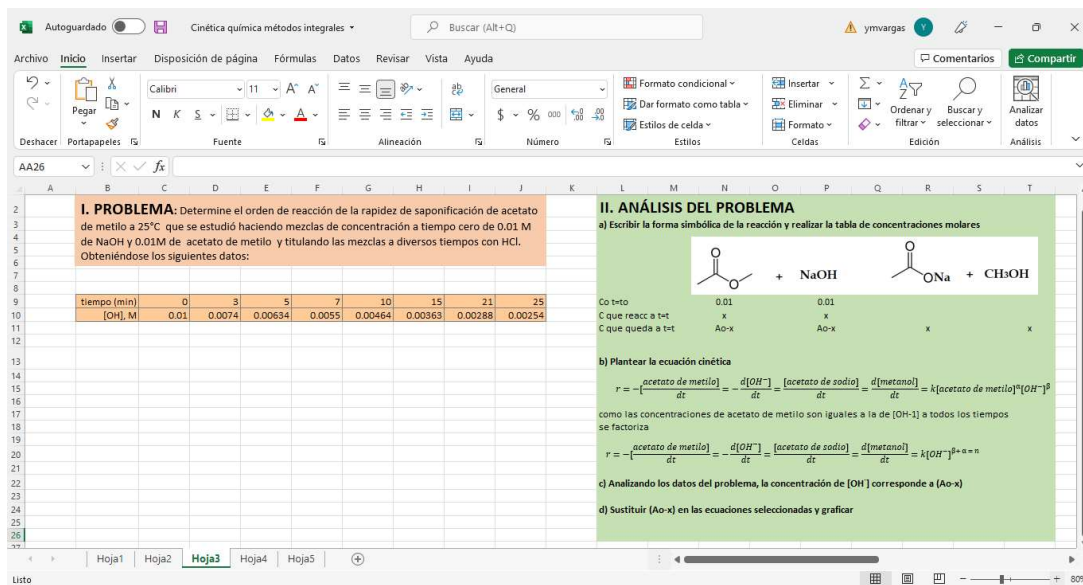
104

## 105 3. Resultados y análisis

106

107 En la Fig. (1), se observa un ejemplo de la utilización de la hoja de cálculo Excel, en  
 108 donde el problema se escribió insertando un cuadro de texto de Word, los datos del  
 109 problema se escribieron directamente en las celdas. Para el análisis del problema, se  
 110 insertó la forma simbólica de la reacción química generada en *ChemDraw*, y las  
 111 ecuaciones se generaron en el editor de ecuaciones de la hoja de cálculo.

112



**I. PROBLEMA:** Determine el orden de reacción de la rapidez de saponificación de acetato de metilo a 25°C que se estudió haciendo mezclas de concentración a tiempo cero de 0.01 M de NaOH y 0.01M de acetato de metilo y titulando las mezclas a diversos tiempos con HCl. Obteniéndose los siguientes datos:

tiempo (min)	0	3	5	7	10	15	21	25
[OH] <sup>-</sup> M	0.01	0.0074	0.00634	0.0055	0.00464	0.00363	0.00288	0.00254

**II. ANÁLISIS DEL PROBLEMA**

a) Escribir la forma simbólica de la reacción y realizar la tabla de concentraciones molares

$$\text{CH}_3\text{COOCH}_3 + \text{NaOH} \rightarrow \text{CH}_3\text{COONa} + \text{CH}_3\text{OH}$$

Conc. Inicial	0.01	0.01		
Que reacciona	x	x		
Que queda a t=t	Ao-x	Ao-x	x	x

b) Plantear la ecuación cinética

$$r = -\frac{d[\text{acetato de metilo}]}{dt} = \frac{d[\text{OH}^-]}{dt} = \frac{d[\text{acetato de sodio}]}{dt} = \frac{d[\text{metanol}]}{dt} = k[\text{acetato de metilo}]^m[\text{OH}^-]^n$$

como las concentraciones de acetato de metilo son iguales a la de [OH<sup>-</sup>] a todos los tiempos se factoriza

$$r = -\frac{d[\text{acetato de metilo}]}{dt} = \frac{d[\text{OH}^-]}{dt} = \frac{d[\text{acetato de sodio}]}{dt} = \frac{d[\text{metanol}]}{dt} = k[\text{OH}^-]^{m+n}$$

c) Analizando los datos del problema, la concentración de [OH<sup>-</sup>] corresponde a (Ao-x)

d) Sustituir (Ao-x) en las ecuaciones seleccionadas y graficar

Figura 1. Problema y análisis del problema en la hoja de Excel. Elaboración propia.

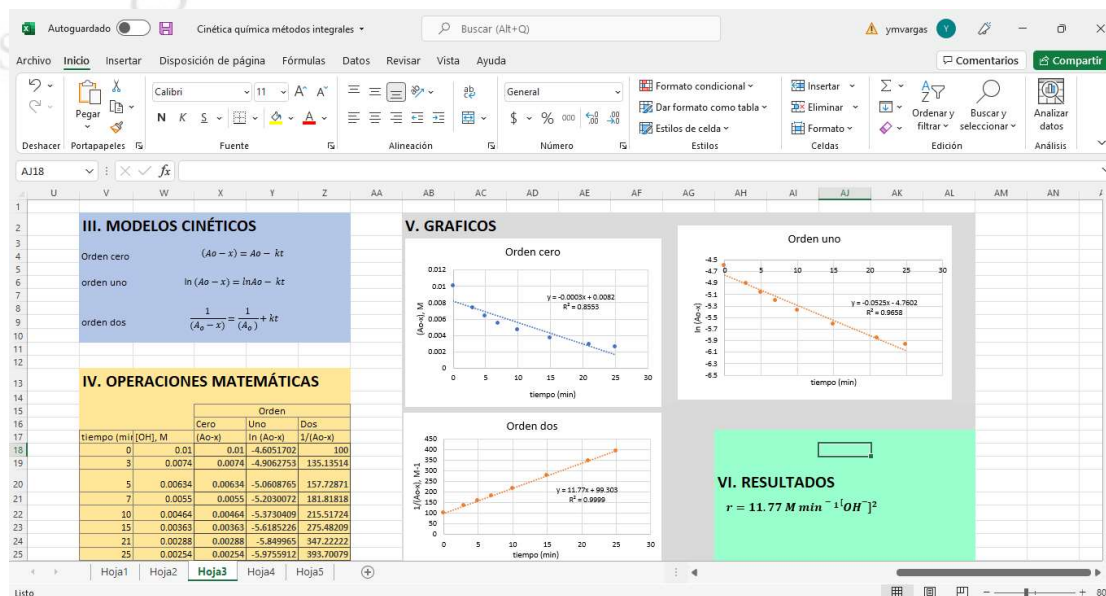
113

114

115

116  
117  
118  
119  
120  
121  
122  
123  
124  
125  
126  
127  
128  
129  
130  
131  
132  
133

En la Fig. (2), se presenta la continuación de la resolución del problema, en donde los modelos cinéticos se insertaron con el editor de ecuaciones. En la misma hoja se realizaron las operaciones matemáticas, así como los gráficos. Los gráficos se ajustaron a una regresión lineal y se obtuvieron las ecuaciones de las líneas rectas con su respectiva ordenada al origen, pendiente y  $R^2$ . Finalmente, se compararon los valores de  $R^2$  y se escribió el resultado, es decir la ecuación cinética. Es importante resaltar que los estudiantes subieron las actividades a Classroom con el mismo formato presentado en las Figs. (1) - (2) y que además durante las sesiones sincrónicas, para dar continuidad al trabajo de los estudiantes o resolver las dudas, ellos compartieron su pantalla al grupo. Lo mismo ocurrió cuando los estudiantes trabajaron en salas en equipos de 4 estudiantes y el profesor dio la retroalimentación. Entonces, la hoja de cálculo compartida al grupo permitió seguir el trabajo de los estudiantes durante las clases en línea y evitó que la clase fuera una clase magistral en donde el profesor ve únicamente nombres y/o fotografías sin saber que está pasando del otro lado de pantalla y los estudiantes interactuaron con el profesor y con sus compañeros.



134  
135  
136  
137  
138  
139  
140  
141  
142  
143  
144

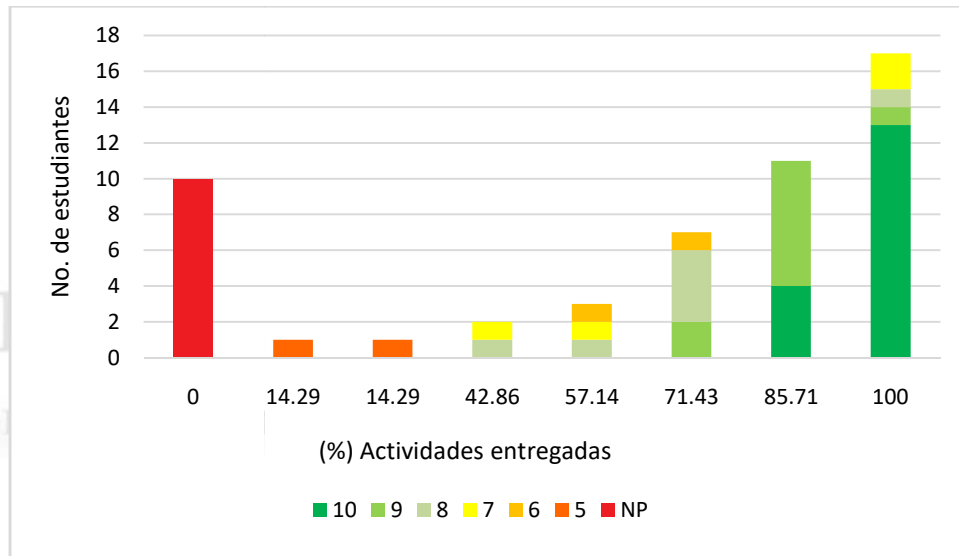
**Figura 2. Modelos cinéticos, operaciones matemáticas, gráficos y resultados en Excel. Elaboración propia.**

### 3.1. Evaluación

En la evaluación se consideraron las actividades que los estudiantes subieron a Classroom ya sea de forma individual y/o en equipo. Como se presenta en la Fig. (3), 17, 11, 7, 3 y 2 estudiantes entregaron el 100%, 85.71%, 71.43%, 57.14% y el 42.86% de las actividades respectivamente. Se observa que, a mayor porcentaje de participación, mejores resultados obtuvieron en el examen.

145  
146  
147  
148  
149  
150  
151  
152

En el grupo que constó originalmente de 34 hombres y 18 mujeres, abandonaron el curso 10 estudiantes (ocho hombres y dos mujeres), que se evaluaron como No Presentó (NP). Considerando únicamente a los estudiantes que entregaron actividades (42), aprobaron el curso 96.15 % de hombres y el 93.75% de mujeres. El alto porcentaje de aprobación indica una relación directa entre las actividades realizadas y los aprendizajes.



153  
154  
155  
156  
157

Figura 3. Actividades que los estudiantes subieron a la plataforma. Elaboración propia

Tabla 1. Resultados de la evaluación

	Estudiantes inscritos	Estudiantes que no se presentaron (NP)	Estudiantes que entregaron actividades				
			Estudiantes	Aprobados	No aprobados	Aprobados (%)	No Aprobados (%)
<b>Hombres</b>	34	8	26	25	1	96.15	3.85
<b>Mujeres</b>	18	2	16	15	1	93.75	6.25
<b>Total</b>	52	10	42	40	2		

158  
159

Fuente: Elaboración propia

160  
161

### 3.2. Encuesta de satisfacción

162  
163  
164  
165

La encuesta de satisfacción que contestaron los estudiantes se dividió en 5 secciones, la primera acerca de las estrategias didácticas, la segunda fue la comunicación entre profesor-estudiantes y estudiante-estudiante, la tercera respecto a las herramientas tecnológicas con las que contaron para la clase y la última acerca

166 del uso de la hoja de cálculo Excel. Posteriormente, se determinó el porcentaje de las  
 167 respuestas totalmente y muy satisfecho como se muestra en la Tab. (2).  
 168

169 Las estrategias didácticas que mayor satisfacción presentaron fueron el ABP y el  
 170 ABE con 93.37%. La explicación del profesor con la tableta y con la hoja de cálculo  
 171 Excel con el 91.3%. Respecto a la comunicación del curso en línea entre profesor-  
 172 estudiante y estudiante-estudiante el 91.3% opinó que se encuentran totalmente o  
 173 muy satisfechos. Finalmente, el 97.82% de los estudiantes opinaron que se  
 174 encuentran totalmente o muy satisfechos con el uso de la hoja de cálculo Excel en el  
 175 curso en línea.  
 176

177 **Tabla 2. Encuesta de satisfacción**  
 178

Rubro	Preguntas ¿Qué tan satisfecho estas con...?	Totalmente y muy satisfecho (%)
Estrategias y actividades didácticas	1. Explicación del profesor con pizarra	91.30
	2. Ejemplos realizados por el profesor con Excel	91.30
	3. Ejercicios realizados individualmente de forma sincrónica	86.95
	4. Trabajo en equipos de forma sincrónica	93.47
	5. Tareas individuales.	89.10
	6. Tareas en equipo	93.47
	7. Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)	93.47
Comunicación en línea	8. Comunicación verbal o escrita (Excel) con el profesor.	91.30
	9. Comunicación con tus compañeros de equipo (Excel)	91.30
	10. Comunicación con otros compañeros.	78.26
Herramientas	11. Con la computadora con la que cuentas para la clase.	86.95
	12. Con el teléfono celular que utilizas para las clases.	97.82
	13. Con la calculadora con la que cuentas.	95.65
	14. Con tu conexión de internet con la que cuentas para la clase.	89.13
Hoja de cálculo Excel.	15. Con el manejo de la hoja de cálculo Excel como pizarra, calculadora y graficadora.	97.82

180  
 181 También, se solicitó a los estudiantes que expresaran sus opiniones acerca de la  
 182 clase en línea Tab. (3). En términos generales resalta que a los estudiantes les gustó  
 183 el trabajo en equipo y el aprendizaje basado en problemas. En particular el trabajo en  
 184 equipo los hace sentirse acompañados, y como lo mencionan a veces tienen más  
 185 confianza de preguntarse entre ellos que a los profesores.  
 186

187 En adición, mencionan que Excel es un software importantísimo para el desglose de  
188 las actividades y que aprender Excel le ha permitido resolver problemas de otras  
189 asignaturas, mostrando la importancia de la hoja de cálculo Excel para mejorar los  
190 aprendizajes.

191  
192 Como profesores en línea, no es fácil hacer la retroalimentación de forma verbal, o  
193 escrita a cada estudiante, pero cuando los estudiantes realizan el análisis y  
194 desarrollo en la hoja de Excel, permite identificar las necesidades de aprendizaje de  
195 los estudiantes para dar en clase una retroalimentación grupal y mejorar los  
196 aprendizajes.

197  
198  
199

**Tabla 3. Encuesta de satisfacción**

*Me agrada que podamos **trabajar en equipo** porque en varios casos las dudas que se llegaban a generar se resolvían entre nosotros.*

*Me resultó bastante didáctica y fácil de comprender, más por la parte de **aprendizaje basado en problemas**.*

*Excelente asesoría por parte de la profesora, **los ejercicios fueron muy ilustrativos**.*

*Muy didáctica, creo que los trabajos en equipo son más prácticos y podemos resolver nos dudas entre nosotros.*

*Gran manejo de **clase** por parte de la profesora.*

*Todo estuvo claro en la **clase**.*

***Las clases** me gustaron mucho, porque la profesora estaba presente en todo momento para resolver las dudas que teníamos, así como, los ejemplos eran claros y la explicación se comprende fácil.*

*La profesora trató siempre de ver la forma de explicar y que nosotros razonáramos, eso estuvo muy bien. Creo que las **actividades en equipo** somos muy buenas porque entre nosotros nos ayudamos.*

*Me pareció **una clase activa**, aunque el horario no era de mi agrado. Aún con eso la profesora logró mantener mi atención en los temas y a pesar de las dificultades que conlleva la enseñanza a distancia supo adaptarse y guiar al grupo.*

*Básicamente me gustó la dinámica de la **clase**, estuvo entretenido, aunque algo pesado porque fue en las mañanas, pero de ahí todo bien.*

*Muy buena profesora, súper atenta y ayuda en otros temas más allá de su materia. De todas las materias que tuve en el semestre, sin duda alguna, fisicoquímica V (teoría), fue la mejor. Comenzando por los temas, me parecieron muy interesantes y me animó a continuar con la profundización de estos.*

*De igual forma, el desarrollo de los conceptos y en general de **la clase** fue muy bueno, pues considero que la profesora domina cada uno de los temas y la forma de explicarlos por medio de ejemplos, más que de teoría es un acierto.*

*También me ayudó el uso de las diferentes herramientas sugeridas en clase, **Excel es un software importantísimo** para el desglose de las **actividades**.*

*Me pareció muy buena la forma de adaptarse de la profesora al **sistema a distancia**. Se resolvieron la mayoría de las dudas y **junto con los compañeros** fue sencillo pulir detalles.*

*Aprender **Excel** me permitió resolver problemas de otras asignaturas*

200

#### 201 4. Conclusiones

202

203 Después de haber utilizado diversas estrategias didácticas, se determinó que las  
204 estrategias del aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje basado en equipos  
205 satisfacen más a los estudiantes para su aprendizaje.

206 Asimismo, la estrategia de comunicación con la hoja de cálculo Excel que sirvió  
207 como una pizarra digital, y que en la misma hoja se escribieron los problemas, las  
208 ecuaciones, se realizaron los cálculos y gráficos, mejoró la comunicación entre  
209 profesor-estudiante y cuando se trabajó en equipos mejoró la comunicación entre  
210 estudiante-estudiante.

211 Adicionalmente, permitió a los estudiantes una mayor participación tanto en las  
212 clases en línea como en las actividades asignadas como tarea. También, se  
213 determinó que, a mayor participación de los estudiantes en las actividades a través  
214 de la hoja de cálculo Excel, mejores resultados para la enseñanza y aprendizaje del  
215 curso fueron obtenidos. Esta comunicación permite que los estudiantes perciban a  
216 las clases en línea como presenciales.

217 Por lo anterior, se concluye que la hoja de cálculo Excel es fundamental para la  
218 enseñanza y aprendizaje de cursos en línea que llevan una carga matemática alta  
219 que se imparten en línea y que probablemente pueda tener la misma eficiencia en  
220 clases presenciales.

221

#### 222 Agradecimientos

223 Investigación realizada gracias al Programa UNAM-PAPIIT N113722 y UNAM  
224 PAPIIME PE203222.

225

#### 226 5. Índice de referencias

227

228 • Naughton, L., Butler, R., Parkes, A., Wilson, P., & Gascoyne, A. (2020).  
229 Raising aspirations using elements of team-based learning in mathematics: a  
230 pilot study. *International Journal of Mathematical Education in Science and  
231 Technology*, 1–17.

232 • Obaya, A., Vargas-Rodríguez, G. I., Lima-Vargas, A. E. & Vargas-Rodríguez,  
233 Y. M. (2018). Aprendizaje basado en problemas: ¿En qué tiempo se  
234 descompone la leche pasteurizada a temperatura ambiente? *Educación  
235 Química*, 29(1), 99-109.

236 • Vargas-Rodríguez, Y. M., Obaya-Valdivia, A., Montañó-Osorio, C., Lima-  
237 Vargas, A. E., Pacheco-Ortín, S. M. and Vargas-Rodríguez, G. I. (2020) Online  
238 Applied Problem-Based Learning to determine the shelf life (expiration date) of  
239 an on-site solution of refrigerated drug. *International Journal of Educational  
240 Technology and Learning*, 9 (1),10-18.

241 • Vargas-Rodríguez, Y. M., Obaya-Valdivia A. E., Vargas-Rodríguez, G.I.,  
242 Villalobos-García, R. and Lima-Vargas, A. E. ITC: PBL Online Pharmaceutical  
243 Physical Chemistry Update Experiences of Teachers Baby Boomers and

- 244 Millennials. *International Journal of Development Research*, 11(3), 45583-  
245 45589.
- 246 • Físicoquímica V, 2021. Plan de estudios de la Carrera de Química. Facultad  
247 de Estudios Superiores Cuautitlán-Universidad Nacional Autónoma de México.  
248 [https://www.cuautitlan.unam.mx/licenciaturas/quimica/descargas/1619\\_fisicoq](https://www.cuautitlan.unam.mx/licenciaturas/quimica/descargas/1619_fisicoq)  
249 [uimica\\_V.pdf](#)

MEMORIAS DEL  
Congreso Internacional  
Sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas



# LA EDUCACIÓN EN LÍNEA: NIVELES DE APRENDIZAJE Y EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN LAS CIENCIAS SOCIALES

Lima Vargas Alvaro Enrique<sup>1\*</sup>, Lima-Vargas Suemi<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Universidad de Quintana Roo Campus Playa del Carmen Av. Universidades, 77710  
Playa del Carmen, Q.R.

<sup>2</sup>Universidad Autónoma del Estado de México Unidad Académica Profesional  
Tlalnepantla. Av. Acueducto, Colinas de San José, Tlalnepantla de Baz, Edo.  
México.

AP - POSM065

## Resumen

En la educación superior el pensamiento matemático es fundamental para que los estudiantes puedan desarrollarse de forma adecuada, no obstante, los estudios de pensamiento matemático en el sector educativo son realizados en su mayoría en la educación básica y media superior bajo un modelo de educación presencial, dejando de lado la educación superior y el modelo de educación en línea. La pandemia ocasionada por el Covid-19 ha estimulado el desarrollo de medidas sanitarias, que han modificado la forma de gestión de los aspectos educativos. Estas nuevas formas de gestión han obligado al sector educativo a transformar su modelo presencial a un modelo en línea. Por lo que esta investigación tiene como objetivo determinar la influencia del pensamiento matemático en los niveles de aprendizaje de los estudiantes en la educación superior en el área de ciencias sociales en el modelo de educación en línea. El estudio se realizó a través de un cuestionario con reactivos de opción múltiple y preguntas abiertas a través de Forms. La población fueron 92 estudiantes de las carreras de Ingeniería Empresarial y Administración Hotelera, de la Universidad de Quintana Roo. Con base en sus respuestas se analizaron el razonamiento deductivo y el razonamiento matemático en los niveles de aprendizaje. Los resultados del estudio revelaron que el razonamiento deductivo influyó en el nivel de aprendizaje de los estudiantes teniendo como variables más significativas la interpretación de información, reconocimiento de patrones y representación espacial, en contraste el razonamiento matemático no indicó ser determinante en los niveles de aprendizaje de los estudiantes. Estos resultados ayudarán al sector educativo en diversos rubros entre ellos el diseño perfiles de ingreso para las carreras en línea y la creación de cursos de regularización académica.

**Palabras clave:** Niveles de aprendizaje, Lógica Matemática.

<sup>1\*</sup> Autor para la correspondencia. E-mail: [aelima@uqroo.edu.mx](mailto:aelima@uqroo.edu.mx)

## 38 1. Introducción

39

40 La pandemia ocasionada por el COVID-19 ha estimulado el desarrollo de medidas  
41 sanitarias, las cuales han modificado la forma de gestión de las dimensiones  
42 económicas, sociales y educativas (Vergara et al., 2020). Estas nuevas formas de  
43 gestión han obligado al sector educativo a transformar su modelo presencial a un  
44 modelo en línea (Vargas-Rodríguez et al., 2020). La nueva modalidad de educación  
45 en línea ha presentado grandes beneficios al proceso educativo al integrar nuevos  
46 recursos educativos digitales, tales como los recursos educativos abiertos los cuales  
47 se definen como material didáctico específicamente desarrollado para la enseñanza-  
48 aprendizaje en línea que son de distribución gratuita (UNESCO, 2019). Estos recursos  
49 se consideran un apoyo en la interacción docente-estudiante en el proceso de  
50 enseñanza aprendizaje (Sucerquia, Londoño y Jaramillo, 2016).

51

52 En el caso de la Educación Superior para que los estudiantes puedan tener  
53 aprendizajes significativos en este nuevo modelo en línea es preciso que cuenten con  
54 un conjunto de conocimientos y habilidades específicas (Vargas-Rodríguez et al.,  
55 2021). Para contar con los beneficios que ofrecen los recursos educativos en el  
56 proceso de enseñanza aprendizaje en la educación en línea los estudiantes dependen  
57 directamente de los conocimientos y habilidades propios (Unigarro, 2004). Las  
58 habilidades y competencias que deben presentar los estudiantes en el nivel superior  
59 para desarrollarse de forma adecuada son: el pensamiento matemático y la  
60 comprensión lectora (Ceneval, 2021).

61

62 Los estudios del impacto del pensamiento matemático en la educación son extensos  
63 abarcando temas como la creatividad (Ayllón et al., 2016), la formación del  
64 pensamiento matemático (Lozada y Fuentes, 2018), las estrategias de aprendizaje  
65 (Escorcía et al., 2013), entre otros. No obstante, los estudios de pensamiento  
66 matemático en la educación son predominantes en la educación básica y media  
67 enfocados mayormente en las estrategias didácticas, asimismo priorizando la  
68 educación presencial. Dejando de lado no solo a la educación superior y el modelo  
69 educativo en línea sino tan bien la relación que existe entre el pensamiento matemático  
70 y los niveles de aprendizaje.

71

### 72 **Pensamiento matemático**

73 Gödel (2006) indica que el pensamiento matemático es un constructo formado por dos  
74 elementos. El primero de ellos se enfoca en las relaciones, combinaciones y símbolos,  
75 aplicados en la geometría, funciones y figuras el cual se denomina razonamiento  
76 matemático y se divide en 4 aspectos.

77

78 1. **Razonamiento aritmético:** El cual considera las operaciones básicas suma, resta  
79 multiplicación, división, mínimo común múltiplo, máximo común divisor de números  
80 enteros y decimales

- 81 2. **Razonamiento algebraico:** El cual considera lenguaje algebraico, operaciones con  
82 monomios o binomios, productos notables, factorización, ecuaciones y sistema de  
83 ecuaciones  
84 3. **Razonamiento estadístico y probabilístico:** El cual considera frecuencias,  
85 nociones de probabilidad y medidas descriptivas.  
86 4. **Razonamiento geométrico:** El cual considera figuras geométricas y figuras solidas  
87

88 El segundo elemento del pensamiento matemático es el razonamiento deductivo el  
89 cual es utilizado como base en el desarrollo de diversas ciencias y se divide en 4  
90 aspectos.

91

- 92 1. **Integración de información:** El cual considera las conclusiones obtenidas en  
93 función de texto, imágenes, mapas y tablas  
94 2. **Interpretación de relaciones lógicas:** El cual considera relaciones de  
95 equivalentes, las decodificaciones y las analogías.  
96 3. **Reconocimiento de patrones:** El cual considera sucesiones numéricas,  
97 alfanuméricas y de figuras.  
98 4. **Representación espacial:** El cual considera la perspectiva, combinación de  
99 figuras, modificación de objetos y operaciones con figuras y objetivos.

100

### 101 **Niveles de aprendizaje (Taxonomía de Bloom)**

102

103 El determinar los niveles de aprendizaje por parte del estudiante durante el proceso de  
104 enseñanza aprendizaje es fundamental en la labor educativa. En este sentido la  
105 Taxonomía de Bloom es uno de los elementos más recurrentes en el ámbito  
106 académico para determinar el nivel de aprendizaje por parte de los estudiantes, debido  
107 a su estructura de jerarquización del conocimiento el cual se establece en orden  
108 ascendente (Conklin, 2005).

109

110 La taxonomía de Bloom se desarrolló con el objetivo de determinar el nivel de  
111 conocimientos que adquieren los estudiantes posteriores al proceso de enseñanza  
112 aprendizaje. La taxónoma categoriza los elementos afectivos, psicomotriz y cognitivos  
(Bloom et al., 1956).

113

- 114 1. **Recordar:** Refiere a la capacidad del estudiante de reconocer la información (no  
115 requiere razonar ni comprender los conceptos recordados)  
116 2. **Comprender:** Refiere a la capacidad del estudiante de explicar los conceptos  
117 3. **Aplicar:** Refiere a la capacidad del estudiante de seleccionar el método adecuado  
118 para resolver un problema  
119 4. **Analizar:** Refiere a la capacidad del estudiante de clasificar, dividir y distinguir  
120 procesos, así como ser capaz de descomponer problemas para dar soluciones  
121 5. **Evaluar:** Refiere a la capacidad del estudiante de dar soluciones complejas a  
122 problemas poco comunes y generar ideas para resolverlas  
123 6. **Crear:** Refiere a la capacidad del estudiante de filosofar sobre alternativas a  
124 problemas generando alternaciones o modificaciones a los postulados existentes.

125

Por lo anterior, en este trabajo se presenta un estudio enfocado en la educación

126 superior para determinar la influencia del pensamiento matemático en los niveles de  
 127 aprendizaje de los estudiantes del área de ciencias sociales en el modelo educativo  
 128 en línea.

129

## 130 **2. Metodología o desarrollo**

131

### 132 **Tipo de investigación.**

133 La metodología de esta investigación se define como no experimental, observacional  
 134 de corte transversal, en función de su forma de recabar la información. Tiene un  
 135 objetivo correlacional-causal y es de índole cuantitativo acorde a la forma de analizar  
 136 la información (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018).

137

### 138 **Participantes del estudio**

139 Los participantes del estudio son 92 estudiantes perteneciente al modelo educativo en  
 140 línea de las carreras de administración hotelera e ingeniería empresarial. Con edades  
 141 entre 18 y 23 años, sin distinción de género.

142

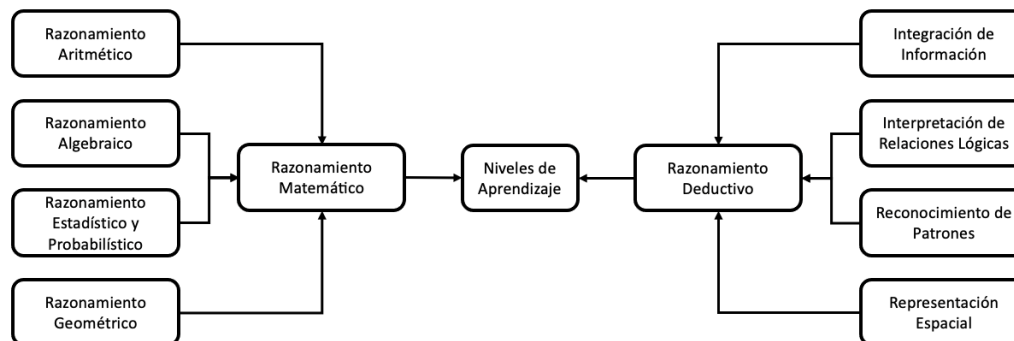
### 143 **Parámetros de medición**

144 La recolección de información para el estudio se desarrolló en dos etapas. La primera  
 145 etapa comprendió de un instrumento de recolección de datos de 60 ítems constituido  
 146 por 30 preguntas de razonamiento matemático y 30 de razonamiento deductivo,  
 147 estructurado mediante de opción múltiple. La segunda etapa, comprendió de un  
 148 instrumento de recolección de datos de 30 ítems constituido por 20 preguntas de  
 149 opción múltiple y 10 preguntas con problemas para desarrollar enfocadas en medir el  
 150 conocimiento de los conceptos correspondientes a mercadotecnia y administración  
 151 estratégica.

152

### 153 **Modelo estructural de la investigación**

154 El modelo de la investigación tiene como objetivo, demostrar la correlación entre las  
 155 variables del pensamiento matemático (razonamiento matemático y razonamiento  
 156 deductivo) como factor determinante en los niveles de aprendizaje obtenidos por los  
 157 estudiantes en la educación en línea (Figura 1)



158

159

160

161

**Figura 1. Modelo de la Investigación. Elaboración propia.**

162 **Tratamiento de datos**

163 El tratamiento de datos se desarrollará en dos etapas. La primera etapa validez de la  
 164 información, se desarrolló mediante el cálculo de la multicolinealidad por Tau de  
 165 Kendall con la finalidad de eliminar errores en la estimación de las correlaciones de las  
 166 variables de razonamiento matemático y razonamiento deductivo (Tabla 1).

167  
 168 La segunda etapa, comprobación del modelo estructural, se realizó mediante un  
 169 coeficiente de determinación (Valor  $R^2$ ) y correlación de Pearson, con la finalidad de  
 170 comprobar la relación entre los constructos y dar validez al modelo de investigación.

171  
 172

**Tabla 1. Parámetros de aceptación del estudio.**

Rubro	Indicador	Parámetro de Aceptación	Fuente
Validez de la Información	Multicolinealidad	> 0.7	(Laurencelle, 2009)
	Coeficiente de determinación (Valor $R^2$ )	> 0.6	(Santabárbara, 2019)
Comprobación del Modelo Estructural	Correlación de Pearson	> 0.8	(Hair et al., 2017)

173 **Fuente:** Elaboración propia.

174 **3. Resultados y discusiones**

175

176 La tabla 2, presenta los resultados de la multicolinealidad de las variables de  
 177 razonamiento matemático: razonamiento aritmético, razonamiento algebraico,  
 178 razonamiento estadístico y probabilístico y razonamiento geométrico. Los valores  
 179 presentaron una Tau de Kendall de  $T_b = 0.370$  para la asociación entre razonamiento  
 180 aritmético y razonamiento algebraico. Mientras tanto la relación entre razonamiento  
 181 aritmético con razonamiento estadístico y razonamiento geométrico fue de 0.071 y  
 182 0.026 respectivamente. Asimismo, los valores de razonamiento algebraico fueron de  
 183 0.116 y 0.388 para razonamiento estadístico y geométrico. Finalmente, la relación y  
 184 razonamiento geométrico indico un valor de 0.056.

185  
 186

**Tabla 2. Análisis de multicolinealidad de Razonamiento Matemático**

Razonamientos	Aritmético	Algebraico	Estadístico y probabilístico	Geométrico
Aritmético	1			
Algebraico	0.370	1		
Estadístico y probabilístico	0.071	0.116	1	
Geométrico	0.026	0.388	0.056	1

187 **Fuente:** Elaboración propia mediante SPSS Versión 26.

188 La tabla 3 presenta los resultados de la multicolinealidad de las variables de  
 189 razonamiento deductivo: integración de información, interpretación de relaciones  
 190 lógicas, reconocimiento de patrones y representación espacial. Donde la integración  
 191 de información presenta valores de 0.448, 0.306 y 0.268 para las relaciones con las  
 192 variables interpretación de relaciones lógicas, reconocimiento de patrones y  
 193 representación espacial. Por su parte, interpretación de relaciones lógicas mostró  
 194 valores de 0.439 y 0.276 para reconocimiento de patrones y representación espacial  
 195 respectivamente. Finalmente, la relación de reconocimiento de patrones y  
 196 representación espacial indico un valor de 0.397.

197 **Tabla 3. Análisis de multicolinealidad de Razonamiento Deductivo**

Integración	Información	Relaciones lógicas	Patrones	Espacial
Información	1			
Relaciones lógicas	0.448	1		
Patrones	0.306	0.439	1	
Espacial	0.268	0.276	0.397	1

198 **Fuente:** Elaboración propia mediante SPSS Versión 26.

199  
 200 Los resultados la multicolinealidad determinaron que no existe una relación entre las  
 201 variables de razonamiento matemático y razonamiento deductivo. Con ello, dando  
 202 validez a los resultados de esta investigación al no existir sesgo alguno en la  
 203 estimación de los análisis posteriores.

204  
 205 La tabla 4 presenta los resultados de la comprobación del modelo teórico de la  
 206 investigación en relación con las variables de razonamiento matemático. Donde  
 207 razonamiento matemático presento una  $R^2$  de 0.563 y una correlación de Pearson de  
 208 0.753. La variable de razonamiento aritmético indico valores de 0.431 y 0.661 para  $R^2$   
 209 y correlación de Pearson, asimismo razonamiento algebraico y razonamiento  
 210 geométrico indicaron  $R^2$  de 0.627 y 0.457 respectivamente. Finalmente, razonamiento  
 211 estadístico mostro valores de 0.627 para  $R^2$  y 0.794 para correlación de Pearson.

212  
 213 **Tabla 4. Comprobación de Razonamiento Matemático.**

Variable Independiente	Beta no estandarizada	Coefficiente de error estándar	Correlación de Pearson	$R^2$ Ajustada	Comprobación de correlación
Razonamiento Matemático	0.681	0.063	0.753	0.563	No
Variables					
Aritmético	0.481	0.048	0.661	0.431	No
Algebraico	0.424	0.051	0.609	0.364	No
Estadístico	0.533	0.043	0.794	0.627	Si
Geométrico	0.508	0.059	0.680	0.457	No

214 **Fuente:** Elaboración propia mediante SPSS Versión 26. Nota: Para razonamiento matemático la variable depen-  
 215 diente son los niveles de aprendizaje y para las variables razonamiento aritmético, algebraico, estadístico y geo-  
 216 métrico la variable dependiente es razonamiento matemático.

217 Los resultados de razonamiento matemático determinaron que no existe una  
 218 correlación entre el razonamiento matemático y los niveles de aprendizaje en los  
 219 estudiantes universitarios del área de ciencias sociales en el modelo de educación en  
 220 línea. Del mismo modo los resultados precisaron el razonamiento matemático en los  
 221 estudiantes de ciencias sociales en la educación superior en el modelo educativo en  
 222 línea se ve directamente relacionado con el razonamiento estadístico y probabilístico.  
 223 Esto resultados son consistentes al considerar que los cursos de estadística son  
 224 fundamentales en los planes de estudio en las ciencias sociales.

226 La tabla 5 presenta los resultados de la comprobación del modelo teórico de la  
 227 investigación en relación con las variables de razonamiento deductivo. Donde  
 228 razonamiento deductivo presento una R2 de 0.871 y una correlación de Pearson de  
 229 0.934. La variable integración de información indico valores 0.698 para R2 y 0.838 para  
 230 correlación de Pearson. Por su parte, interpretación de relaciones lógicas mostro  
 231 valores de 0.538 y 0.737 para R2 y correlación de Pearson respectivamente.  
 232 Asimismo, reconocimiento de patrones y representación espacial presentaron valores  
 233 de 0.617 y 0.729 para R2 y 0.788 y 0.856 para correlación de Pearson.

234  
 235 **Tabla 5. Comprobación de Razonamiento Deductivo**

Variable Independiente	Beta no estandarizada	Coefficiente de error estándar	Correlación de Pearson	R2 Ajustada	Comprobación de hipótesis
Razonamiento Deductivo	0.996	0.040	0.934	0.871	Si
Variables					
Información	0.854	0.059	0.838	0.698	Si
Relaciones	0.751	0.073	0.737	0.538	No
Patrones	0.809	0.067	0.788	0.617	Si
Espacial	0.828	0.053	0.856	0.729	Si

236 **Fuente:** Elaboración propia mediante SPSS Versión 26. Nota: Para razonamiento deductivo la variable dependiente  
 237 son los niveles de aprendizaje y para las variables integración de información, integración de relaciones lógicas,  
 238 reconocimiento de patrones y representación espacial la variable dependiente es razonamiento deductivo

239  
 240 Los resultados de razonamiento deductivo determinaron la existencia de una  
 241 correlación entre el razonamiento deductivo y los niveles de aprendizaje de los  
 242 estudiantes universitarios del área de ciencias sociales en el modelo educativo en  
 243 línea. Del mismo modo los resultados precisaron que la integración de información,  
 244 reconocimiento de patrones y representación espacial son elementos esenciales en el  
 245 razonamiento deductivo de los estudiantes. Asimismo, no se encontró una relación  
 246 significativa entre relaciones lógicas y razonamiento deductivo. Estos hallazgos son  
 247 inusuales al considerar que en las ciencias sociales las principales estrategias  
 248 didácticas son el aprendizaje basado en proyecto y el aprendizaje basado en  
 249 problemas los cuales se enfocan entre otras cosas en estimular elementos como  
 250 integración de relaciones lógicas.

251  
 252

#### 253 4. Conclusiones

254

255 Este estudio examinó la relación entre pensamiento matemático y los niveles de  
256 aprendizaje en la educación superior en el modelo educativo en línea en el área de  
257 ciencias sociales. Los resultados confirmaron que el razonamiento deductivo es  
258 determinante en el nivel de aprendizaje de los estudiantes, asimismo confirmaron que  
259 el razonamiento matemático no es esencial en los niveles de aprendizaje.

260

261 Académicamente, esta investigación se considera exitosa al abordar un tema  
262 preponderante en la actualidad el cual es el nivel de aprendizaje en la educación  
263 superior en el modelo educativo en línea. El objetivo final de esta investigación es  
264 apoyar a los programas educativos y a los docentes a comprender mejor los elementos  
265 que contribuyen en el nivel de aprendizaje de los estudiantes. Esta información es  
266 fundamental para el desarrollo de cursos remediales y propedéuticos para los  
267 estudiantes de nivel superior que se desempeñen en el modelo educativo en línea en  
268 el área de ciencias sociales.

269

#### 270 Agradecimientos

271 Investigación realizada gracias al proyecto UQROO-DATM < ZN/PI-07/22>

272

#### 273 5. Índice de referencias

274

- 275 • Ayllón, M. F., Gómez, I. A., y Ballesta-Claver, J. (2016). Pensamiento  
276 matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas  
277 matemáticos. Propósitos y representaciones, 4(1), 169-218.
- 278 • Bloom, B. et al. (1956). Taxonomy of educational objectives. New York: David  
279 Mckay.
- 280 • CENEVAL. (2021). Examen Nacional de Ingreso a la Educación Superior  
281 (EXANI-II). NUEVO EXANI-II INGRESO A LA EDUCACIÓN SUPERIOR.  
282 Recuperado 20 de enero de 2022, de [https://ceneval.edu.mx/wp-  
content/uploads/2021/07/EXANI-II-Folleto-Nuevo-1.pdf](https://ceneval.edu.mx/wp-content/uploads/2021/07/EXANI-II-Folleto-Nuevo-1.pdf)
- 283 • Conklin, J. A. (2005) Taxonomy for learning, teaching and assessing: a revision  
284 of Blooms's taxonomy of educational objectives. Educational Horizons, 83(3),  
285 153-159.
- 286 • Escorcía M., J., Chaucanés J. A. E., Medrano S. A., y Therán P, E. (2013).  
287 Estrategias didácticas para potenciar el pensamiento matemático a partir de  
288 situaciones del entorno métrico en estudiantes de educación básica y media del  
289 municipio de Sincelejo. Revista Científica, 2, 360–364.  
290 <https://doi.org/10.14483/23448350.7075>
- 291 • Gödel, K., & García-Trevijano, C. (2006). La lógica matemática de  
292 Russell. Teorema: Revista Internacional de Filosofía, 25(2), 113–137.  
293 <http://www.jstor.org/stable/43047399>
- 294 • Hair, J., Hult, T., Ringle, C. y Sarstedt, M. (2017). A primer on partial least  
295 squares structural equation modeling (PLS-SEM), Los Angeles, SAGE.



- 296 • Hernandez-Sampieri, R., y Mendoza, C. P. (2018). Metodología de la  
297 Investigación las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. México, D.F: McGRAW-  
298 HILL.
- 299 • Laurencelle, L. (2009). Le tau et le tau b de Kendall pour la correlation de  
300 variables ordinals simples ou categorielles. *Tutorials in Quantitative Methods for*  
301 *Psychology*, 5 (2), 51-58. [10.20982/tqmp.05.2.p051](https://doi.org/10.20982/tqmp.05.2.p051)
- 302 • Lozada, J. A. D., y Fuentes, R. D. (2018). Los métodos de resolución de  
303 problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Bolema: Boletim de*  
304 *Educação Matemática*, 32, 57-74.
- 305 • Santabárbara, J. (2019). Cálculo del intervalo de confianza para los coeficientes  
306 de correlación mediante sintaxis en SPSS. *Revista d'Innovació i Recerca*  
307 *en Educació*, 12 (2), 1–14. <https://doi.org/10.1344/reire2019.12.228245>
- 308 • Sucerquia, E.A., Londoño, R.A., y Jaramillo, C.M. (2016). La educación a  
309 distancia virtual: desarrollo y características en cursos de matemáticas. *Revista*  
310 *Virtual Universidad Católica del Norte*, 48, 33-55
- 311 • Unigaro, M. A. (2004). Educación Virtual: Encuentro Formativo en el  
312 Ciberespacio. UNAB.
- 313 • Vargas-Rodriguez, Y. M., Valdivia, A. E. O., Montano-Osorio, C., Lima-Vargas,  
314 A. E., Pacheco-Ortin, S. M., & Vargas-Rodriguez, G. I. (2020). Online Applied  
315 Problem-Based Learning to Determine the Shelf Life of an on-Site Solution of  
316 Refrigerated Drug., 9(1), 10–18. <https://doi.org/10.20448/2003.91.10.18>
- 317 • Vargas–Rodríguez, Y. M., Obaya-Valdivia A. E., Vargas-Rodríguez, G.I.,  
318 Villalobos-García, R. y Lima-Vargas, A. E. (2021) ITC: PBL Online  
319 Pharmaceutical Physical Chemistry Update Experiences of Teachers Baby  
320 Boomers and Millennials. *International Journal of Development Research*, 11(3),  
321 45583-45589.
- 322 • Vergara, E., Vergara, R., Álvarez, M., Camacho, L., y Gálvez, J. (2020).  
323 Educación médica a distancia en tiempos de COVID-19. *Educación Médica*  
324 *Superior*, 34(2), e2383.  
325 [http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0864-  
326 21412020000200025&lng=es&tlng=es](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-21412020000200025&lng=es&tlng=es)

# ENSEÑANZA EN LÍNEA Y EL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Vega Rodríguez Ana Karen<sup>1\*</sup>, Ángeles López Rebeca y Gómez Castillo Manuel Odilón

Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo.

EN-POSM066

## Resumen

Nos encontramos en la búsqueda de actividades que definan al alumno como sujeto activo en la adquisición de los conocimientos, que construya, reconstruya y utilice adecuada y conscientemente sus propias mediaciones y estrategias de aprendizaje, logrando así el tránsito del plano externo al plano interno en cada una de estas actividades lo que le permitirá una mayor solidez de lo aprendido y por tanto una mayor eficiencia en la recuperación de la información, sin embargo la enseñanza de la Estadística y Probabilidad en el bachillerato suele quedarse en el nivel de los algoritmos o la simple memorización de fórmulas olvidando que su estudio debe favorecer el desarrollo de la unidad del lenguaje y el pensamiento.

Debido a lo anterior se ha diseñado una actividad para la enseñanza-aprendizaje de la Distribución de Probabilidad con el apoyo de diferentes herramientas TIC para la enseñanza en línea, entre ellas CO-DAP, Microsoft Forms, Zoom, Excel, basado en el Método Histórico Cultural de Vygotski y la Teoría de la actividad de Leontiev con un desarrollo amplio y profundo a los significados conceptuales y metodológicos de la estadística. Se presentan algunos de los resultados y observaciones que se obtuvieron durante una sesión en línea por Zoom aplicada en grupos de sexto semestre de bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo.

**Palabras clave:** actividad, enseñanza, aprendizaje, TIC, estadística.

## 1. Introducción

La enseñanza de las matemáticas busca que el aprendizaje sea significativo, entendiendo que no debe quedarse en el nivel de la memorización, tampoco será partiendo de los significados abstractos de los conceptos ya formalizados en la disciplina; por el contrario, el aprendizaje debe ser un proceso metodológico, didáctico, que comience con los sentidos personales e ir avanzando a niveles cada vez más abstractos.

De lo anterior el planteamiento central de este trabajo es incorporar las herramientas TIC en el diseño de una actividad en la búsqueda de generar aprendizajes significativos, es decir, interesar al alumno por aprender estadística, llevando al aula

<sup>1\*</sup> Autor para la correspondencia. E-mail: anakaren.vega@cch.unam.mx

42 actividades con ejemplos y ejercicios dentro del marco de las experiencias e  
43 intuiciones accesibles a los alumnos que los estimule para encontrar diferentes formas  
44 de resolver problemas y formular argumentos que validen sus resultados.

45

46

## 47 2. Metodología o desarrollo

48

### 49 2.1 Zona de Desarrollo Próximo

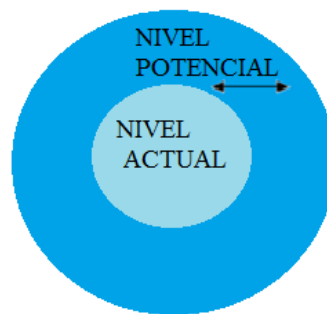
50

51 De acuerdo con Vygotsky, L. S. (1995), refiere dos niveles de desarrollo al primero lo  
52 llama nivel de *desarrollo actual* (NA) y al segundo nivel de desarrollo potencial. El nivel  
53 de desarrollo actual comprende lo que puede realizar de manera independiente con  
54 los procesos que ya han sido completados es decir puede resolver los problemas uti-  
55 lizando los significados que ya han sido interiorizados. Por otro lado, si requiere ayuda  
56 o acompañamiento de otras personas para resolver una determinada tarea constituye  
57 su nivel de *desarrollo potencial* (NP).

58

59 Diferenciar en una persona su NA y su NP es lo que Vigotsky denominó su *Zona de*  
60 *Desarrollo Próximo* (ZDP) Figura.1, Vigotsky muestra con la zona de desarrollo pró-  
61 ximo que existe un camino por el cual se puede avanzar, partiendo del NA a través del  
62 andamiaje.

63



64

65

66

67

68

69

Figura 1. Zona de Desarrollo Próximo.

70

### 70 2.1.2 Estructura Psicopedagógica de La Actividad

71

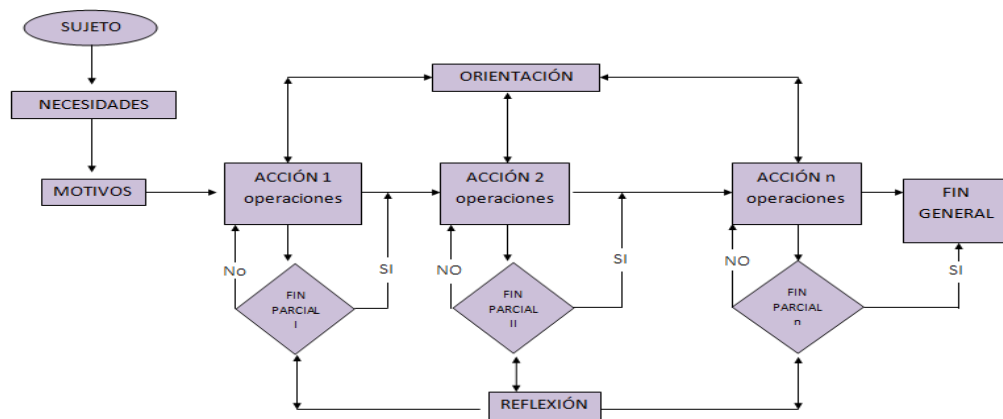
72 De acuerdo con Leontiev, D. A. (2005) una estructura fundamental de todo tipo de  
73 actividad basada en la evolución de las capacidades cognoscitivas de los alumnos,  
74 cuyo fin general exige pasar por una serie de acciones compuestas a su vez por una  
75 serie de operaciones concretas.

76

77 La función de las actividades diseñadas para el aprendizaje es, que el estudiante  
 78 desarrolle los sentidos personales que tiene sobre el concepto u objeto de estudio,  
 79 para ir aproximando a los significados teóricos que el profesor considere apropiados,  
 80 para convertir los sentidos personales en herramientas semióticas.

81  
 82 La actividad cognoscitiva constituida por una serie de acciones conforma la estructura  
 83 en la que los distintos componentes se relacionan y vinculan del modo representado  
 84 en la Figura 2.

85



86

87

88

89

**Figura 2. Estructura de la Actividad de Leontiev**

90 **2.2 Didáctica Concreta**

91

92 La metodología del presente trabajo tiene bases en el aprendizaje significativo  
 93 como la transformación de la conciencia a través de la unidad que existe entre pensa-  
 94 miento y lenguaje y que buscará generarse a través de principios pedagógicos y di-  
 95 dácticos como son la actividad y la zona de desarrollo próximo.

96

97 La actividad consiste en la realización de tres acciones:

98

99

- La primera acción consiste en realizar el juego “Chicos y Grandes”.
- La segunda acción “Comportamiento de la variable *suma*”
- La tercera acción “Probabilidad Teórica”

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110 Anteriormente la actividad se llevaba en el aula permitiendo una dinámica muy enri-  
 111 quecedora con los alumnos Figura. 3, llevando un tablero de juego, fichas y dados, sin  
 112 embargo, ante las condiciones que actualmente se viven con el confinamiento provo-  
 113 cado por la Covid-19 se buscaron formas de adaptación utilizando herramientas digi-  
 114 tales.  
 115



Figura 3. Juego Chicos y Grandes antes de la nueva normalidad

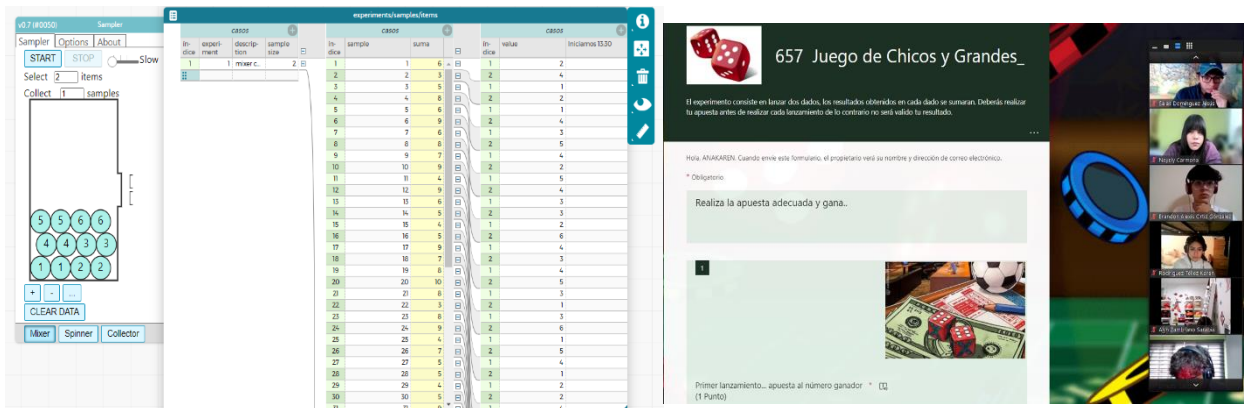
116  
 117  
 118  
 119 Es así como la estrategia y dinámica tuvieron que ser modificadas y adaptadas a las  
 120 herramientas tecnológicas existentes y accesibles a los docentes, durante la  
 121 enseñanza en línea.  
 122

### 3. Resultados y análisis

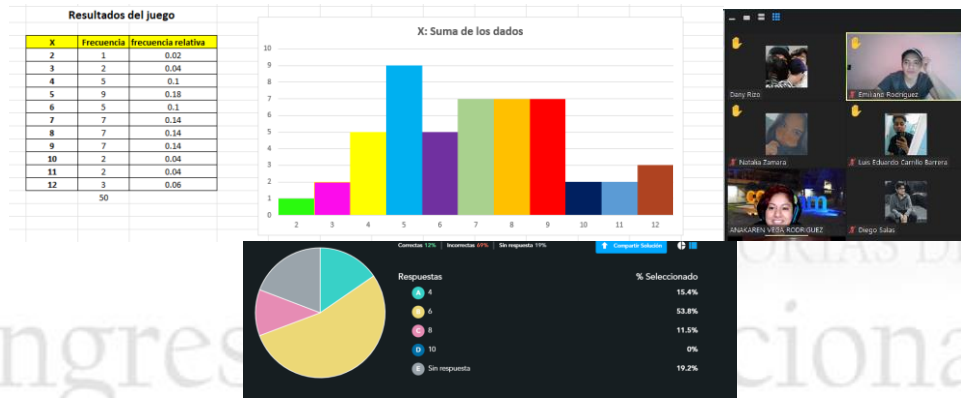
123  
 124  
 125 Se presentan algunas observaciones que se obtuvieron en la plataforma Zoom donde  
 126 se llevó a cabo la sesión con grupos de sexto semestre de bachillerato del Colegio de  
 127 Ciencias y Humanidades Plantel Vallejo.  
 128

129 La primera acción consiste en realizar el juego “Chicos y Grandes”, para esta actividad  
 130 se utilizó una simulación en CODAP para el lanzamiento de los dados y para que los  
 131 alumnos realizarán sus apuestas se generó un formulario en Microsoft Forms Figura.  
 132 4.  
 133  
 134

Figura 4. Juego Chicos y Grandes



135 La siguiente acción permitió organizar la información en tablas, así como su  
 136 representación gráfica para realizar un análisis de los datos. Para ello se compartieron  
 137 los datos obtenidos en CODAP por medio de un archivo de Excel que el alumno  
 138 manipuló para desarrollar la actividad y observar el comportamiento de la variable  
 139 “suma”, el manejo y uso de las diferentes herramientas en Zoom permitieron  
 140 interactuar e incluso hacer pequeñas encuestas sobre sus apuestas Figura 5.  
 141



142

143  
 144  
 145  
 146  
 147  
 148  
 149  
 150  
 151

Figura 5. Comportamiento de la variable “Suma”

Finalmente se realizó un análisis comparativo que le permitió reflexionar sobre la toma de decisiones al realizar el cálculo de la probabilidad teórica Figura 6.

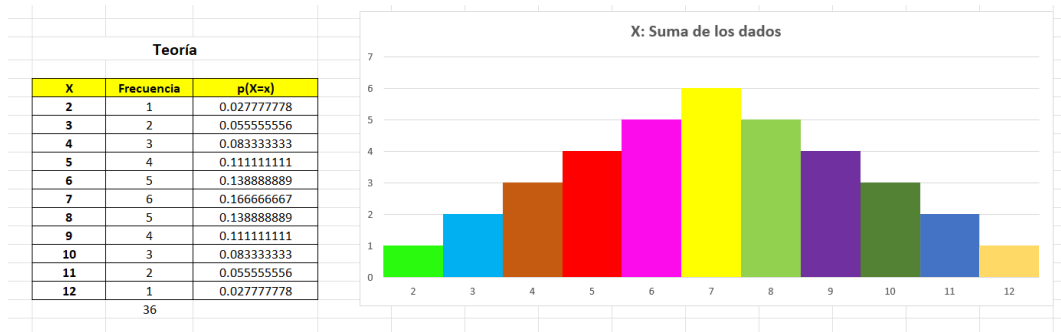


Figura 6. Probabilidad Teórica

152  
 153  
 154  
 155  
 156  
 157  
 158  
 159  
 160  
 161

El cálculo del valor esperado y su interpretación permitió que el alumno encontraría diferentes argumentos vinculando el concepto con el contexto del experimento.

El desarrollo de las acciones acompañado del diálogo dirigido por parte del profesor el alumno logra realizar un análisis de los datos en términos de la probabilidad y es capaz

162 de dar argumentos para realizar la mejor apuesta e incluso para determinar si el juego  
163 es justo.

164

165

#### 166 **4. Conclusiones**

167

168 La actividad con su orientación hacia el aprendizaje significativo y su concepción del  
169 significado aprender a aprender, fueron posibles debido a que logramos adaptar una  
170 gran teoría del conocimiento como lo es el Método Histórico Cultural y la Teoría de la  
171 Actividad, a las características muy particulares de los alumnos del CCH, proponiendo  
172 comenzar la enseñanza aprendizaje con sus sentidos personales y no por el algoritmo  
173 en su sentido clásico.

174

175 El diseño de la actividad en la que se involucraron diferentes herramientas digitales  
176 para atender la nueva normalidad en la educación permitió alcanzar los aprendizajes  
177 esperados e incrementar el nivel de desarrollo actual del alumno situándonos en el  
178 nivel de desarrollo potencial.

179

180

#### 181 **5. Índice de referencias**

182

##### 183 Libros

184

185 Leontiev, D. A. (2005). Aproximación a la teoría de la actividad: Vigotsky en el pre-  
186 sente. *Eclecta*, 3(9), 29-39.

187

188 Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje* (pp. 97-115). A. Kozulin (Ed.). Barce-  
189 lona: Paidós.

190

191

192

# EL VIDEO COMO HERRAMIENTA PARA VISUALIZAR, ANALIZAR Y COMPRENDER LAS MATEMÁTICAS

Silvia Guadalupe Canabal Cáceres<sup>1,\*</sup>, Laura Isabel Mora Reyes<sup>2</sup>  
<sup>1,2</sup>Escuela Nacional Preparatoria 6, UNAM  
Colegio de Matemáticas.

EN-POSM067

## Resumen

Los retos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, llevaron al docente a innovar con el diseño de actividades que sean potencialmente significativas, que promuevan que los estudiantes desarrollen habilidades de orden superior y se fomente el pensamiento crítico y la creatividad.

En las clases no presenciales se requiere motivar al estudiante, por lo que hay que hacer atractivos los objetos matemáticos por medio de estrategias didácticas. En este trabajo se propone que con una intervención didáctica con aprendizaje experiencial (que tiene a la persona como el centro del aprendizaje) y el uso de herramientas como Youtube, Filmora o Imovie, expresen su creatividad y aprendan matemáticas, en particular las cónicas y las rectas con los puntos notables del triángulo; al diseñar y elaborar videos desde su guión y culminen en una producción de su propia autoría y con trabajo colaborativo, donde inventen o creen su avatar, incluyan su voz y den vida a los objetos matemáticos al presentarlos con movimiento.

El cierre de esta estrategia se realizó con exposiciones en plenaria donde los jóvenes mostraron dominio sobre los temas en cuestión, respondieron las dudas de sus pares y en una evaluación sumativa posterior pudieron responder correctamente a los cuestionamientos sobre estos temas.

En cuanto a la enseñanza de varios contenidos, como las rectas y puntos notables del triángulo, se muestran videos elaborados por las autoras, editados con las herramientas ya mencionadas, publicados en aulas virtuales o en Youtube, donde el estudiante puede consultarlos, regresarlos y reproducirlos las veces que lo considere necesario.

Los resultados obtenidos en esta experiencia, con la aplicación de esta propuesta, son muy alentadoras, se observó una mejora significativa en la participación del alumnado al entusiasmarse por utilizar una nueva herramienta con la que podría expresarse.

**Palabras clave:** video, comprensión, aprendizaje, cónicas, rectas, puntos notables

## 1. Introducción

La enseñanza de las matemáticas ha tenido a lo largo de varias décadas, cambios que se han manifestado por medio de investigaciones, innovaciones, trabajos y múltiples ideas relacionadas con la didáctica, que han contribuido a que el aprendizaje de los objetos matemáticos sea significativo.

<sup>1</sup> \* Autor para la correspondencia. E-mail: silcanabal@hotmail.com



41 Ante la situación que se ha vivido durante ya más de dos años, la enseñanza, el  
42 aprendizaje y la didáctica han tenido un proceso vertiginoso de adaptación y mejora.  
43 A menudo, ciertos conceptos no son comprendidos si no se relacionan con un contexto  
44 que tenga significado para los estudiantes, lo más común es que sean memorizados y  
45 fácilmente olvidados, Orozco (2017).

46  
47 Las clases debían ser a distancia, con herramientas digitales, y para lograr cierta  
48 efectividad educativa de cualquier recurso, es necesario diseñar la propuesta con base  
49 en considerar el objetivo de aprendizaje y el proceso cognitivo de visualización y  
50 razonamiento, esto de acuerdo con Duval (2016).

51 De acuerdo con esta idea, surge la urgente necesidad de avanzar en los programas  
52 de estudios, de motivar al estudiante y al mismo tiempo lograr el aprendizaje de los  
53 diferentes objetos matemáticos, cada docente desde sus propias concepciones y  
54 conocimientos construye, diseña y adapta sus habilidades para alcanzar los objetivos  
55 de aprendizaje que estén incluidos en su planeación.

56  
57 Las estrategias didácticas pueden implementarse en conjunto con las herramientas  
58 digitales, existe una gran cantidad de ellas; esta propuesta se implementa al conjuntar  
59 el aprendizaje experiencial con el video; dentro de la enseñanza situada, existen  
60 modelos instruccionales derivados de los estudios en cognición y aprendizaje situados,  
61 donde se cita el modelo del “aprendizaje experiencial” propuesto por John Dewey, que  
62 es activo y genera cambios en la persona y en su entorno, transforma los ambientes  
63 físicos y sociales para extraer lo que contribuye a experiencias valiosas y establece un  
64 fuerte vínculo entre el aula y la comunidad, Díaz Barriga (2003).

65  
66 Entre las estrategias para el aprendizaje significativo centradas en el aprendizaje  
67 experiencial que se enfocan en la construcción del conocimiento y en el desarrollo de  
68 capacidades reflexivas y de pensamiento crítico, se encuentran por ejemplo: el análisis  
69 de casos, el método de proyectos, el trabajo en equipos cooperativos y el aprendizaje  
70 mediado por las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, por  
71 mencionar algunos.

72 Si se vinculan aún pueden potencializar más la posibilidad del empoderamiento y la  
73 perspectiva de participar activamente, pensar de manera reflexiva y crítica, investigar  
74 y actuar con responsabilidad en torno a asuntos relevantes, junto con el trabajo  
75 cooperativo que promueve el diálogo, la discusión grupal, la toma de decisiones y  
76 redirecciona la experiencia de aprendizaje.

77  
78 La herramienta digital elegida para esta propuesta fue el video, se conoce como  
79 referencia la aplicación del video en el área médica, desde hace ya varias décadas, de  
80 acuerdo con Martínez (2020), aunque puede pensarse que se apega más al estilo de  
81 aprendizaje visual, se pueden crear actividades interactivas que produzcan motivación  
82 e interés por ese aprendizaje, donde se desarrolle la capacidad de análisis, la  
83 autonomía, y la reestructuración de conocimiento.

84

85 El docente es quien elabora los materiales enfocados a sus estudiantes, a los  
86 contenidos y objetos matemáticos, que desea que aprendan; los videos didácticos se  
87 pueden dividir, de acuerdo con Martínez, (2020) en:

88

- 89 • Video lección es el que se utiliza sin la presencia del profesor, los educados  
90 observan el video y se apropian del conocimiento.
- 91 • Video de apoyo, que se emplea como un medio de enseñanza, facilita la  
92 ejecución de las tareas propias de la docencia.
- 93 • Video interactivo, incluye una metodología activa y participativa en el proceso  
94 docente, fomenta la comunicación simétrica y recíproca.
- 95 • Paquete didáctico, se incluyen múltiples medios de aprendizaje, es ideal para  
96 los estudios dirigidos y a distancia.

97

98 Con base en esto, se presentan a los estudiantes videos realizados por las autoras en  
99 donde se abordan los contenidos en cuestión, los puntos y rectas notables del triángulo  
100 y las secciones cónicas y sus ecuaciones, que son videos de apoyo para acompañar  
101 la explicación en clases síncronas a distancia.

102 Publicados en un canal de YouTube, puesto a disposición de los educados para su  
103 libre consulta, esto genera un ambiente de confianza al poder revisar nuevamente los  
104 contenidos, pausarlos, repetirlos y analizarlos cuando lo consideren pertinente,  
105 inclusive sino lograron acudir a sus clases.

106

107 Se utiliza como apoyo, un aula Classroom para tener un espacio donde se pueda  
108 valorar con varias actividades, el desempeño de los estudiantes. Se solicita una  
109 actividad de cierre, donde los jóvenes deben realizar un video, que será realizado en  
110 equipo y que deberán exponer en plenaria, para compartir y reforzar los contenidos  
111 conceptuales y procedimentales. Elaboraron el guión, su propio avatar, eligieron la  
112 aplicación para hacer la grabación (se les sugirió YouTube, Filmora, Imovie, etc.),  
113 también el material a incluir o imágenes que deberían tener una licencia adecuada que  
114 les permita utilizarlas y respetar los derechos de autor.

115

116 Desde la didáctica de la matemática, varios investigadores consideran a la educación  
117 matemática como un conjunto de ideas y conocimientos, procesos, actitudes y en  
118 general actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y  
119 valoración del conocimiento matemático que tiene lugar con carácter intencional,  
120 según Rico (2000), por esto se incluyen actividades donde el educando construya y  
121 represente su conocimiento y además lo socialice.

122

## 123 **2. Metodología o desarrollo**

124

125 Desde el ciclo escolar anterior, se observó que los estudiantes, solicitaban ver  
126 nuevamente las clases y se les recomendaron videos que se encuentran libres en la  
127 red, los problemas que se encontraron es que no siempre incluían todo el tema en  
128 cuestión o eran demasiado extensos, también el nivel de los ejemplos y ejercicios

129 variaba mucho, por lo que dentro de la planeación para el siguiente ciclo, se incluyó el  
130 uso de videos donde no salieran ni sus nombres ni sus rostros (ya que son menores  
131 de edad). En conjunto se diseñaron varias actividades para el logro de los objetivos de  
132 aprendizaje.

133

134 Para llevar a cabo la presente propuesta se trabajó durante el ciclo escolar 2021-2022  
135 desde el mes de agosto hasta febrero, con siete grupos, con estudiantes inscritos en  
136 las asignaturas de Matemáticas IV, Matemáticas V, Matemáticas VI áreas 1 y 2 y de  
137 Estadística y probabilidad, en cada uno de los grupos se utilizó el recurso del video  
138 como una estrategia de enseñanza, con recursos y materiales elaborados por las  
139 autoras y otros que pertenecen al repositorio de Colegio de Matemáticas de la Escuela  
140 Nacional Preparatoria a través de la plataforma de Youtube, se abrió un aula virtual de  
141 Google Classroom para realizar el acompañamiento y el seguimiento de las  
142 actividades académicas.

143

144 Para las clases sincrónicas se utilizó Zoom, en donde se compartían los materiales,  
145 actividades, tareas y videos para ser revisados con las profesoras en esa clase, esto  
146 con el fin de mostrar la forma en la que los estudiantes debían y podían consultarlos y  
147 trabajarlos. Se les mostró el aula de Classroom para que se familiarizarán con los  
148 diferentes recursos y los objetivos no fueran obstaculizados por elementos externos a  
149 los objetos matemáticos, como pueden ser el manejo y/o descarga de las aplicaciones,  
150 del correo electrónico o de la red.

151

152 La cantidad de estudiantes con los que se trabajó con esta estrategia fue cerca de 350,  
153 con las diferentes asignaturas, programas y contenidos particulares de cada una de  
154 ellas. En este trabajo se incluye la estrategia realizada en particular con los jóvenes  
155 inscritos en Matemáticas V, donde se abordan los temas de puntos y rectas notables  
156 de un triángulo y las secciones cónicas, la metodología empleada que se relaciona con  
157 el aprendizaje experiencial y la elaboración de un video fue la siguiente:

158

- 159 • La docente a cargo del grupo explicó en una sesión sincrónica el tema de puntos  
160 y rectas notables del triángulo, compartía y seguía un video con este contenido,  
161 los estudiantes tomaron apuntes y resolvieron sus dudas.
- 162 • La profesora construye junto con los alumnos las medianas y el baricentro con  
163 el software dinámico Geogebra.
- 164 • Los estudiantes en equipo, debían realizar una construcción en Geogebra, ya  
165 sea las alturas con el ortocentro, las bisectrices con el incentro o las mediatrices  
166 con el circuncentro de acuerdo a las definiciones realizadas en la clase. Esta  
167 construcción debía ser explicada con un video, de tal manera que utilizarían un  
168 avatar y su voz si así lo deseaban o con el editor de video, realizar la  
169 presentación a su gusto.
- 170 • Se utilizó una rúbrica para elaborar el video.
- 171 • En plenaria cada equipo presenta sus construcciones, se resolvieron dudas y  
172 se retroalimentaron los conceptos.

173 • Al final se realizó una reflexión sobre los logros de la estrategia antes  
 174 mencionada.

175  
 176 Con esos mismos estudiantes y el video, de acuerdo Ríos (2011), servirá para  
 177 constatar el aprendizaje de los estudiantes, como resultado de las actividades en torno  
 178 a un tema, si realizan explicaciones y aspectos relevantes de un contenido mediante  
 179 el video, le llama *recapitulación o cierre de un tema*, que fue la intención de las autoras  
 180 al pedirles como trabajo de cierre un video elaborado por equipos.

181  
 182 La segunda parte de la estrategia incluyó los mismos pasos que la primera, pero ahora  
 183 debieron trabajar con el contenido de secciones cónicas, de igual forma la profesora  
 184 explicó el tema con un video sobre los cortes al cono y la obtención de las secciones  
 185 cónicas, aquí los jóvenes debieron elaborar un video y completar la información sobre  
 186 las ecuaciones que representan a una cónica.

187  
 188 Cabe mencionar que para este video, una de las peticiones fue que incluyeran  
 189 movimiento en los cortes del cono, como un simulador donde ellos explicarían qué  
 190 sucede cuando los cortes que se efectúan con un plano son paralelos o  
 191 perpendiculares a la base o inclinados y qué cónica se obtiene.

192  
 193 Se les realizó una breve evaluación tipo cuestionario donde ellos debieron manifestar  
 194 los aprendizajes obtenidos, en el siguiente apartado se reportan las experiencias  
 195 recuperadas.

196 Las gráficas que realizaron fueron como las que se muestran en la figura 1 y 2.

197

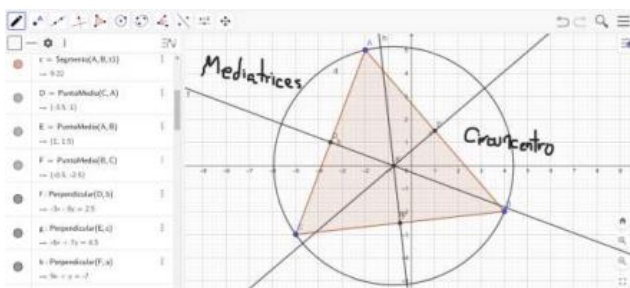


Fig.(1) Mediatrices y circuncentro

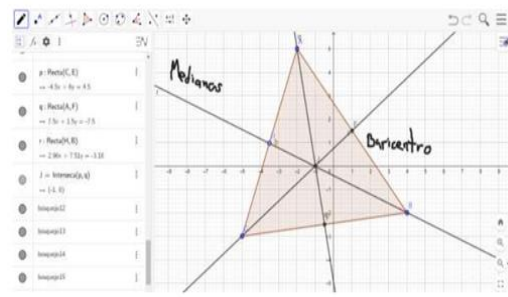


Fig. (2) Medianas y baricentro

198

199

200

201

### 3. Resultados y análisis

202

203 Dentro de la aplicación de esta propuesta se observa que los estudiantes que fueron  
 204 expuestos a ella, mostraron un buen entendimiento del tema, la mayoría de ellos  
 205 lograron explicar con sus palabras, las rectas y puntos notables del triángulo, lo  
 206 verbalizaron en las exposiciones en plenaria, lo escribieron en el chat en la clase  
 207 sincrónica y lo expresaron en el cuestionario escrito al final del tema.

208 Como resultado de la segunda parte se puede observar una gran comprensión sobre  
 209 las secciones cónicas, al realizar varias veces en el diseño de su video los movimientos

210 del plano al cortar el cono, aprendieron la forma en la que se obtienen las cónicas. Lo  
211 expresaron en las exposiciones y en el cuestionario.

212

213 Se les pidió que realizaran una reflexión sobre el uso del video y escribieran de acuerdo  
214 con su percepción, qué tanto consideraban que contribuyó con el aprendizaje de los  
215 puntos y rectas notables del triángulo y con las secciones cónicas, y los comentarios  
216 fueron avasalladores hacia la pertinencia de la estrategia al facilitarles la comprensión  
217 al analizarlo con videos en la clase y al realizar el video con sus equipos.

218 El trabajo colaborativo también se privilegió, en esta situación los jóvenes necesitan  
219 trabajar con sus pares y aprender entre ellos mismos así como socializar el  
220 conocimiento, tienen que aprender a convivir y comprender que el aprendizaje es  
221 personal y que cada uno es responsable de su propio conocimiento.

222

#### 223 **4. Conclusiones**

224

225 Al aplicar esta propuesta se observan las ventajas que en la literatura se revisaron, los  
226 estudiantes desarrollaron su creatividad, habilidades de investigación y aprendieron a  
227 utilizar el software Geogebra, mejoraron también su habilidad en el manejo de  
228 aplicaciones de video; esta propuesta se enfoca al uso del video como estrategia  
229 didáctica, pero no se deja de lado la importancia del software especializado  
230 (Geogebra) que contribuye con la comprensión de los objetos matemáticos, tal como  
231 se pudo observar en los resultados de la implementación de este trabajo.

232 El video como estrategia didáctica en forma conjunta con el aprendizaje experiencial  
233 contribuyen con la comprensión de los objetos matemáticos, de acuerdo con lo  
234 observado en la aplicación de esta propuesta.

235

#### 236 **5. Índice de referencias**

237

##### 238 Tesis

239 Orozco, C. (2017). Objetos de aprendizaje con eXeLearning y Geogebra para la  
240 definición y representación geométrica de operaciones con vectores y sus  
241 aplicaciones. Tesis doctoral. Salamanca.

242

##### 243 Revistas

244

245 Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje  
246 significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 5(2). Consultado el día de  
247 5 de marzo de 2022 en: <http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html>

248

249 Martínez Cortés, J., Guevara Bazán, I. A. ., Estrada Esquivel, A. L., & Encino Arambula,  
250 R. . (2020). El video interactivo: Recurso Innovador generador de Transversalidad en  
251 la Enseñanza. *EDUCATECONCIENCIA*, 28(29), 279–302. Recuperado a partir de

252 [http://tecnocientifica.com.mx/educateconciencia/index.php/revistaeducate/article/view](http://tecnocientifica.com.mx/educateconciencia/index.php/revistaeducate/article/view/346)  
253 /346

254 Rico, L., & Sierra, M. (2000). *Didáctica de la Matemática e investigación*. Recuperado  
255 el 5 de marzo de 2022, de Research gate:  
256 [https://www.researchgate.net/publication/279658150\\_Didactica\\_de\\_la\\_Matem](https://www.researchgate.net/publication/279658150_Didactica_de_la_Matematica_e_investigacion)  
257 [atica\\_e\\_investigacion](https://www.researchgate.net/publication/279658150_Didactica_de_la_Matematica_e_investigacion)

258 Ríos, J. (2011). *Federación de Enseñanza de Comisiones Obreras de Andalu-*  
259 *cía* . (s/f). Ccoo.es. Uso didáctico del video. Recuperado el 6 de marzo de 2022, de  
260 <https://www.feandalucia.ccoo.es/indicei.aspx?p=62&d=253&s=0>

261

262 Información en línea

263 Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje  
264 de las matemáticas. En R. Duval, & A. (. Sáenz-Ludlow, *Comprensión y*  
265 *aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis*  
266 (págs. 61-94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de  
267 Caldas.

268